Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 8(1998-1999), 139-142

LOCUL GEOMETRIC ASOCIAT UNEI ELIPSE

Camelia-Mihaela PINTEA, Cornel-Sebastian PINTEA

Dată fiind o conică nesingulară cu centru, mulţimea proiecţiilor ortogonale ale centrului pe tangentele sale se numeşte *locul geometric asociat conicei*.
În această lucrare ne propunem să determinăm ecuaţia locului geometric asociat unei elipse şi să-l reprezentăm grafic cu ajutorul calculatorului.

Considerăm planul π raportat la reperul cartezian ortonormat $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Presupunând că O este centrul elipsei E aceasta are ecuaţia de forma:

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1. **Propoziţie** *Locul geometric asociat elipsei* $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *este mulţimea*

$$\mathcal{L}_E = \{M(x,y) \in \pi \mid (x^2+y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2\} \setminus \{O(0,0)\}$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $M_0(x_0, y_0) \in E$. Ecuaţia tangentei $T_{M_0}(E)$ în M_0 la E este $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ iar ecuaţiile perpendicularei din $O(0,0)$ pe $T_{M_0}(E)$ sunt

$$\begin{cases} x(t) = \frac{x_0}{a^2} t \\ y(t) = \frac{y_0}{a^2} t. \end{cases}$$

Înlocuind $x(t)$, $y(t)$ în ecuaţia lui $T_{M_0}(E)$ obţinem

$$t = \frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}$$

şi deci coordonatele proiecţiei ortogonale ale lui O pe $T_{M_0}(E)$ sunt

$$\begin{cases} x(t) = \frac{x_0}{a^2} \cdot \frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \\ y(t) = \frac{y_0}{b^2} \cdot \frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}. \end{cases}$$

Pentru a elimina pe x_0 şi y_0 din relaţiile de mai sus observăm că

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \text{ şi } a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{1}{\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)^2}.$$

Prin urmare $(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$, adică locul geometric asociat lui E este conţinut în $\mathcal{L}_E$.

Fie acum $M_1(x_1, y_1) \in \mathcal{L}_E$, adică $(x_1, y_1) \neq (0,0)$ şi $(x_1^2+y_1^2)^2 = a^2x_1^2 + b^2y_1^2$. Este uşor de verificat că punctul

$$M\Big(\frac{a^2x_1^2}{x_1^2+y_1^2}, \frac{b^2y_1^2}{x_1^2+y_1^2}\Big)$$

aparţine elipsei E şi că M_1 este proiecţia ortogonală a lui O pe tangenta la E în M, adică M_1 aparţine locului geometric asociat elipsei E şi astfel egalitatea afirmată este complet demonstrată.

2. **Observaţie** Locul geometric $\mathcal{L}_E$ asociat elipsei $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ este o curbă regulară plană.

Într-adevăr, mulţimea $\mathcal{L}_E$ se identifică în mod natural cu mulţimea $\varphi^{-1}(1)$ unde

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \ \varphi(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{a^2x^2+b^2y^2}.$$

Observăm că $\varphi(tx, ty) = t^2\varphi(x,y)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ şi $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, adică φ este omogenă de ordin doi şi deci 1 este valoare regulară a lui φ. Prin urmare $\mathcal{L}_E = \varphi^{-1}(1)$ este o curbă regulară plană.

Pentru a găsi o parametrizare a curbei $\mathcal{L}_E$ folosim coordonatele carteziene (r,θ) care sunt legate de cele carteziene prin relaţiile:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

şi care înlocuite în ecuaţia $(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ a locului geometric asociat lui E conduc la relaţia $r := r(\theta) = \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$.

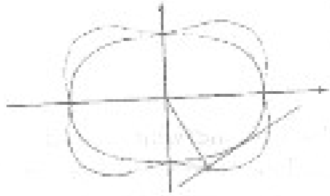
Deci o parametrizare a curbei $\mathcal{L}_E$ este

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

```
Program LocGeometricElipsa;
uses crt,graph;
var
    a,b,gd,gm,cul:integer;
    u,xp,yp,x,y,z,t,k:real;
    i,xx1,xx2,yy1,yy2,xxx1,xxx2,yyy1,yyy2,xe,ye,x1,y1,z1,t1,q1,q2: integer;
procedure elipsa;
begin for i:=1 to 650 do
    if i mod 5=0 then
    begin
        xe:=trunc(100*cos(i)); ye:=trunc(50*sin(i));
        putpixel(xe+200,ye+200,10);
    end;
end; {sfarsit elipsa}
procedure loc;
begin
    for i:=1 to 650 do
        if i mod 5=0 then
```

```
        begin
            u:=0.01*i;
            x1:=trunc(sqrt(100*100*cos(u)*cos(u)+50*50*sin(u)*sin(u))*cos( u));
            y1:=trunc(sqrt(100*100*cos(u)*cos(u)+50*50*sin(u)*sin(u))*sin( u));
            putpixel(x1+200,y1+200,11)
        end;
end;{sfarsit loc}
begin {program}
   clrscr;window(1,2,90,30);textbackground(white);clrscr;
window(5,3,76,20);textbackground(blue);textcolor(lightgreen);c lrscr;
writeln;writeln;writeln(' Problema de loc geometric:');
writeln;writeln;writeln(' Locul geometric al pct. P, aflat la intersectia dintre ');
writeln(' tangenta la elipsa si proiectia centrului O pe tangenta.');
writeln;writeln;writeln;writeln('Apasati o tasta !');readln;
Gd:=Detect;InitGraph(Gd,Gm,'');setbkcolor(black);
            { Elipsa }
   SetColor(white); OutTextXY(200,200,'x');
   repeat
   SetColor(green); cul:=13; a:=a+1;  ellipse(200,200,0,360,101,49);
   if a mod 5=0 then loc;
   u:=0.01*a; elipsa;SetColor(white);
            { Tangenta-elipsei }
   xx1:=trunc(100*cos(u)-50); xx2:=trunc(100*cos(u)+50);
   yy1:=trunc((-50/100)*cos(u)/sin(u)*xx1+50/sin(u));
   yy2:=trunc((-50/100)*cos(u)/sin(u)*xx2+50/sin(u));
   line(xx1+200,yy1+200,xx2+200,yy2+200);
{gata-tangenta}
            { Ortogonala-elipsei }
   xxx1:=trunc(-100*cos(u)); xxx2:=trunc(100*cos(u));
   yyy1:=trunc((100/50)*sin(u)/cos(u)*xxx1); yyy2:=trunc((100/50)*sin(u)/cos(u)*xxx2);
   line(xxx1+200,yyy1+200,xxx2+200,yyy2+200);
{gata-ortogonala}
   x1:=trunc(sqrt(100*100*cos(u)*cos(u)+50*50*sin(u)*sin(u))*cos( u));
   y1:=trunc(sqrt(100*100*cos(u)*cos(u)+50*50*sin(u)*sin(u))*sin( u));
   putpixel(x1+200,y1+200,13);
   delay(100); setcolor(black);
{ Stergere:tangenta-si-ortogonala }
            {Tangenta}
   xx1:=trunc(100*cos(u)-50); xx2:=trunc(100*cos(u)+50);
   yy1:=trunc((-50/100)*cos(u)/sin(u)*xx1+50/sin(u));
   yy2:=trunc((-50/100)*cos(u)/sin(u)*xx2+50/sin(u));
   line(xx1+200,yy1+200,xx2+200,yy2+200);
{gata-tangenta}
            { Ortogonala }
   xxx1:=trunc(-100*cos(u)); xxx2:=trunc(100*cos(u));
   yyy1:=trunc((100/50)*sin(u)/cos(u)*xxx1);
   yyy2:=trunc((100/50)*sin(u)/cos(u)*xxx2);
   line(xxx1+200,yyy1+200,xxx2+200,yyy2+200);
{gata-ortogonala}
   until keypressed;
```

```
  readln; closegraph;
end. {Sfarsit Program}
```



Bibliografie

[GhOp] Gheorghiev, Gh., Oproiu, V., Geometrie diferenţială, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1977.

[Pi] Pintea, C *The associated locus of a hypersurface in* $\mathbb{R}^n$, (va apare).

[VPNC] Vlada, M., Posea, A., Nistor, I., Constantinescu, C., Grafica pe calculator in limbajele Pascal şi C, Editura Tehnică, Bucureşti, 1992.

Liceul "Gheorghe Lazăr", Baia-Mare
Universitatea "Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca, e-mail cpintea@math.ubbcluj.ro

THE LOCUS ASSOCIATED TO AN ELIPSE

Abstract.

For a given non singular conic with center the set of all orthogonal projections of the center on its tangents is called *the associated locus of the conic*. In this paper we are going to find the equation of the associated locus of an ellipse and we also represent it by means of the computer.

Primit: 30.11.1999

Liceul "Gheoghe Lazăr", Baia Mare
Universitatea "Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca
E-mail: cpintea@math.ubbcluj.ro