Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 8(1998-1999), 143 - 146

NUMERE NATURALE CE POT FI PERIMETRE DE TRIUNGHIURI DREPTUNGHICE AVÂND LUNGIMILE LATURILOR EXPRIMATE PRIN NUMERE NATURALE

Vasile TULBA, Eudochia TULBA

Un triplet de forma (a,b,c) unde $a=m^2+n^2$, $b=2mn$, $c=m^2-n^2$ cu $m,n\in\mathbb{N}^*$ şi $m>n$ se numeşte triplet pitagoreic căci

$$a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow(m^2+n^2)^2=(2mn)^2+(m^2-n^2)^2.$$

Dând lui m şi n valori din mulţimea $\mathbb{N}^*$, $m>n$, obţinem triplete pitagoreice.

Scurt istoric. În anul 1984, la faza locală a Olimpiadei de matematică- clasa a VIII-a, a apărut o problemă cu următorul enunţ:

" Există triunghiuri dreptunghice cu lungimile laturilor numere naturale care să aibă perimetrul egal cu 1983? Dar cu perimetrul egal cu 1984?"

Au fost notaţi cu notă maximă, elevii care au pus în evidenţă faptul că, perimetrul unui triunghi dreptunghic având lungimile laturilor numere naturale, este par. Deci 1983 nu poate fi perimetru iar 1984 poate fi căci este număr par.

Într-adevăr, calculând perimetrul unui astfel de triunghi

$$2p=a+b+c=m^2+n^2+2mn+m^2-n^2=2m(m+n)$$

constatăm că el este număr par.

Întrebarea firească care se poate pune este:

Orice număr natural par poate fi perimetru a unui triunghi dreptunghic, având lungimile laturilor numere naturale? Răspunsul este negativ- căci ecuaţia:

(1) $$2m(m+n)=2p \Leftrightarrow \boldsymbol{m(m+n)=p};\ m,n,p\in\mathbb{N}^*,\ m>n$$

nu are, întotdeauna, soluţii în mulţimea $\mathbb{N}^*$ cu m>n.

În cazul numărului 1984, ecuaţia : $m(m+n)=992$ are o soluţie: $(m,n)\in\{(31,1)\}$.

Adică enunţul a fost corect.
Dacă prin enunţ s-ar fi cerut să se afle lungimile laturilor, atunci rezolvitorii mai trebuia să afle: $a=962$, $b=62$ şi $c=960$ iar $962^2=62^2+960^2$

Apoi, ne-am întrebat care sunt numerele naturale 2p care pot fi perimetre de triunghiuri dreptunghice, având lungimile laturilor numere naturale şi am găsit, după mai mult încercări, câteva: 12, 24, 30, 40, 48, 56, 60, 70, 80, 84, 90, 96.

Pentru aceste numere, ca şi perimetre, ecuaţia: $m(m+n)=p$ are o singură soluţie.

Observaţii. 1) Numărul cel mai mic posibil, care poate fi perimetru de triunghi dreptunghic, cu lungimile laturilor numere naturale, este 12 pentru că $m(m+n)<6$ nu are soluţii în N^*, $m>n$

2) Doar 12 numere naturale de două cifre îndeplinesc condiţia de a putea fi perimetre de triunghiuri dreptunghice având laturile numere naturale (ele sunt cele scrise mai sus)

A urmat o altă întrebare: Dacă ecuaţia $m(m+n)=p$, $m,n,p\in\mathbb{N}^*$, $m>n$, poate avea mai multe soluţii?
Răspunsul este afirmativ. Cercetând şirul natural al numerelor şi ţinând seama de condiţiile problemei am constatat următoarele.

1) Dacă 2p∈{240, 360, 480, 504, 672, 720, 840, 864, 960, 1008, 1080, 1188, 1320, 1344, 1400, 1440, 1680,...},
atunci ecuaţia : m(m+n)=p admite câte două soluţii

Exemplu: $2p=240 \Leftrightarrow p=120=10\cdot 12=8\cdot 15$

Deci $$m(m+n)=10\cdot 12 \Leftrightarrow \begin{cases} m=10 \\ n=2 \end{cases};\ (10,2)-\textit{soluţie}$$

$$a=10^2+2^2=104;\ b=2\cdot 10\cdot 2=40;\ c=10^2-2^2=96$$

$104^2 = 40^2 + 96^2$; $(104, 40, 96)$ - *triplet pitagoreic*

şi

$$m(m+n) = 8 \cdot 15 \Rightarrow \begin{cases} m = 8 \\ n = 7 \end{cases}; \ (8, 7) \text{ - } \textit{soluţie}$$

$a = 8^2 + 7^2 = 113$; $b = 2 \cdot 8 \cdot 7 = 112$; $c = 15$

$113^2 = 112^2 + 15^2$; $(113, 112, 15)$ - *triplet pitagoreic*

Deci dacă $2p = 240$ atunci $(m,n) \in \{(10,2),(8,7)\}$ iar

$$(a,b,c) \in \{(104,40,96),(113,112,15)\}$$

2) Dacă $2p = 510510 \Rightarrow p = 255255$ atunci ecuaţia: $m(m+n) = 255255$ are trei soluţii: $p = 455 \cdot 561 = 429 \cdot 595 = 385 \cdot 663$

$(m,n) \in \{(445,106),(429,166),(385,278)\}$ iar

(a,b,c)∈{(218261,96460,195789),(211597,141428,156485),
(225509,214060,70941)}

Tot trei soluţii se obţin când 2p∈{14280, 92820}.

3. Dacă $2p = 60060 \Rightarrow p = 30030$, ecuaţia: $m(m+n) = p$

are 4 soluţii:

$p = 30030 = 130 \cdot 231 = 143 \cdot 210 = 154 \cdot 195 = 165 \cdot 182$

(m,n)∈{(130,101),(143,67),(154,41),(165,17)},
iar
(a,b,c)∈{(27101,26260,6699),(24938,19162,15960),
(25397,12628,22035),(27514,5610,26936)}.

4. Dacă 2p=1021020⇒ p= 510510, atunci ecuaţia $m(m+n)=p$ are 6 soluţii pentru că: 510510=714·715=663·770=595·858=561·910=546·935= 510·1001

(m,n)∈{(714,1),(663,107),(595,263), (561,349),(546,389),(510,491)}

(a,b,c)∈{(509797,1428,509795),(451018,141882,428120),
(423194,312970,284856),(436522,369578,192920),
(449437,424788,146795),(501181, 500820,19019)}.

5. Dacă 2p= 2402040⇒p=1021020, ecuaţia : $m(m+n)=p$ admite 10 soluţii, pentru că: 1021020=1001· 1020=935 ·1092=924 ·1105 = 910 ·1122 = 844 ·1155=
= 853 · 1190 = 780·1309=770·1326=748·1365=715·1428
(m,n)∈{(1001,19),(935,157),(924,181),(910,212),(844,311),(858,332),(780,529),(770,556),(748,617),(715,713)}

6. Dacă 2p=38798760⇒p=19399380, ecuaţia $m(m+n)=p$ are 16 soluţii.

7. Dacă p= 446185740, ecuaţia (1) are 30 de soluţii.

8. Dacă p= 6469693230, ecuaţia (1) are 55 de soluţii.

Mulţumesc d-lui profesor VIRÁNYI IOSIF de la Şcoala cu clasele I-VIII Nr.5 din Baia Mare, care folosindu-se de calculator mi-a dat listele cu mulţimea divizorilor pentru ultimele cinci numere, uşurându-ne cercetarea.

NATURAL NUMBERS WHICH APPEARS AS PERIMETER OF AN RIGHT-ANGLED TRIANGLE WITH INTEGER LENGHT OF SIDES

Abstract. In this note we search for that natural numbers, which can be perimeters of right-angled triangles having the lenghts of the sides natural numbers.

Primit: 1. 04. 1999

Prof. Vasile Tulba
Şcoala Nr. 6 Baia Mare

Prof. Eudochia Tulba
Şcoala Nr. 15 Baia Mare