Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 8(1998-1999), 147-163

MATEMATICA CEASULUI

Vasile TULBA, Eudochia TULBA

Una din cele mai mari descoperiri a geniului uman a fost şi va rămâne invenţia dispozitivului de măsurare a scurgerii timpului, numit ceas (ceasornic). Din punct de vedere matematic, vom considera ca ceas cu minutar şi orar, pe acel dispozitiv de măsurare a trecerii timpului, la care, se produce cea mai mică eroare, într-o perioadă cât mai îndelungată. Pe un astfel de dispozitiv îl vom numi **ceas matematic**.

În condiţiile funcţionării perfecte a unui ceas cu arătătoare, **timp de 12 ore**, se produc vizibil, următoarele **evenimente remarcabile**:

a) la orele 12 (sau zero) se realizează **unghiul nul**;

b) la ora 6 se realizează **unghiul alungit**;

c) la orele 3 şi 9 se realizează **unghiuri drepte**.

În funcţionarea ceasului, **timp de 12 ore**, astfel de **evenimente mai există**. Ne propunem în această lucrare, să studiem:

i) câte evenimente de tipul a), b) şi c) există;

ii) orele exacte la care se produc ele;

iii) ordinea desfăşurării acestor evenimente;

iv) măsurile unghiurilor corespunzătoare fiecărui eveniment, descris de orar respectiv de minutar;

v) legătura dintre unităţile de timp şi unităţile de arc.
Formulele ceasului corespunzătoare diverselor evenimente;

vi) măsura unghiului format de minutar şi orar.
Timpi complementari (ore complementare)

Lucrarea cuprinde:

1⁰. Aritmetica ceasului (partea care se ocupă cu stabilirea orei exacte a evenimentelor);

2⁰. Geometria ceasului (partea care se ocupă cu: stabilirea măsurii unghiului descris de orar respectiv de minutar, corespunzătoare fiecărui eveniment cu poligoanele regulate formate corespunzătoare evenimentelor precum şi proprietăţile acestora);

3⁰. Algebra ceasului (ceasul ca model matematic)

4⁰. Trigonometria ceasului

Se ştie că:
- măsura cercului este egală cu 360^0;
- în timp ce minutarul face 60 minute, orarul face 5 minute, adică viteza minutarului este de 12 ori mai mare decât viteza orarului, sau
- în timp ce minutarul descrie un unghi de rotaţie cu măsura de 360^0, orarul descrie un unghi de rotaţie de 30^0;
- acele ceasornicului se mişcă invers sensului trigonometric;
- legătura dintre unităţile de timp şi unităţile de arc

1^0. $1\ \text{min} = 6^0$; 2^0. $1\ h = 360^0$;

3^0. $\underset{U_m}{\textit{numărul gradelor}} = 6^0 \cdot \textit{numărul minutelor}$; 4^0. $1^0 = \dfrac{1}{6}\ \text{min} = 10\ s$;

5^0. $\underset{U_o}{\textit{numărul gradelor}} = 30^0 \cdot \underset{h_e}{\textit{numărul orelor}}$

Notaţii:

U_0 - măsura unghiului descris de orar;

U_m - măsura unghiului descris de minutar;

$U(\measuredangle(m,O))$ - măsura unghiului format de minutar şi orar;

h_e - ora exactă (formată din partea întreagă + partea fracţionară - exprimată în ore;

h_{ei} - ora exactă în momentul producerii evenimentului i;

U_{Oi} - măsura unghiului descris de orar în momentul i;

U_{mi} - măsura unghiului descris de minutar în momentul i

ARITMETICA ŞI GEOMETRIA CEASULUI

Axiomele ceasului

A.1. La ora 12 (sau zero) arătătoarele ceasului formează unghiul nul.
A.2. La ora 6 acele ceasului formează unghiul alungit.
A.3. La orele 3 şi 9 acele ceasului formează între ele unghiuri drepte.
Arătătoarele sunt pe 12 (sau zero), se porneşte ceasul.

A. Unghiuri nule formate de arătătoarele ceasului

T.1. În timp de 12 ore de funcționare a ceasului, arătătoarele formează unghiul nul de 11 ori.

Demonstrație. Ținând seama de A.1., următoarea suprapunere a acelor se va produce în următorul context:

"În timp ce orarul va parcurge x-minute (considerăm ca punct de plecare din 12 sau zero), minutarul trebuie să parcurgă $(x+60)$ minute sau în timp ce orarul parcurge y^0, minutarul trebuie să facă $(y+360)^0$."

Știm că minutarul are viteza de 12 ori mai mare decât orarul, putem încadra enunțul în următoarea schemă

1..................12

x min........ $(x+60)$ min

rezultă proporția: $\frac{1}{x}=\frac{12}{x+60} \Rightarrow x=\frac{60}{11}\text{ min}=\frac{1}{11}\,h$

iar $(x+60)\text{ min}=\frac{1}{11}\,h+1\,h=\frac{12}{11}\,h$

Acest rezultat (de $12/11\,h$) reprezintă timpul necesar pentru a se produce primul unghi nul, după pornirea ceasului. Folosind faptul că lucrăm cu un ceas matematic, producerea celorlalte unghiuri nule se va face, în mod periodic și la intervale egale de timp. Deci, numărul tuturor unghiurilor nule formate de acele ceasului, timp de 12 ore este: $12\,h:\frac{12}{11}\,h=11$. Adică, timp de 12 h, doar de 11 ori acele ceasului se suprapun.

T.2. *Orele exacte la care se produc unghiurile nule formează o progresie aritmetică cu rația:* $r=\frac{12}{11}\,h$, $a_1=r$, $n=11$.

Demonstrație. Conform lui T.1., există 11 unghiuri nule, deci:

$t_1=1\cdot\frac{12}{11}\,h=1\,h\ 5\text{ min }27\frac{3}{11}\,s$;

$t_2=2\cdot\frac{12}{11}\,h=2\,h\,10\text{ min }54\frac{6}{11}\,s$, ..., $t_{11}=11\cdot\frac{12}{11}\,h=12\,h$ adică

$\div \frac{12}{11}h, \frac{24}{11}h, \frac{36}{11}h, \frac{48}{11}h, \frac{60}{11}h, \frac{72}{11}h, \frac{84}{11}h, \frac{96}{11}h, \frac{108}{11}h, \frac{120}{11}h, \frac{132}{11})$

progresie aritmetică.

T.3. *Măsurile unghiurilor descrise de orar, corespunzătoare momentelor producerii unghiurilor nule formează o progresie aritmetică cu rația:* $r = \frac{360^0}{11}$, $a_1 = r$, $n = 11$.

Demonstrație. Să determinăm măsura unghiului descris de orar corespunzător momentului t_1

$$\left.\begin{array}{l} 1 \ldots\ldots\ldots 12 \\ y^0 \ldots\ldots (y+360)^0 \end{array}\right\} \text{ rezultă proporția: } \frac{1}{y} = \frac{12}{y+360} \rightarrow y = \frac{360^0}{11} = U_{01} \text{ iar șirul:}$$

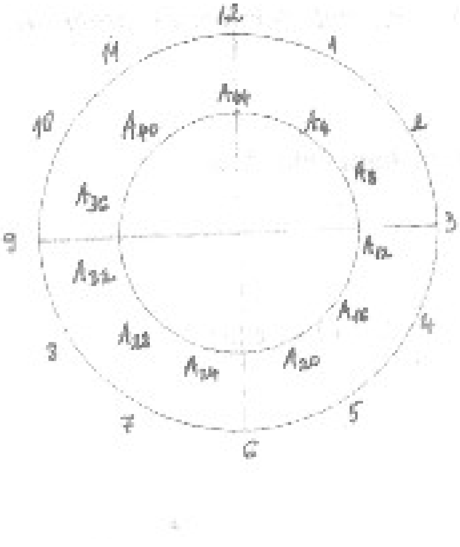
$1 \cdot \frac{360^0}{11}$, $2 \cdot \frac{360^0}{11}$, $3 \cdot \frac{360^0}{11}$, ... , $11 \cdot \frac{360^0}{11}$ formează o progresie aritmetică.

T.4. Măsurile unghiurilor descrise de minutar, corespunzătoare momentelor producerii unghiurilor nule formează o progresie aritmetică cu rația: $r = 12 \cdot \frac{360^0}{11}$, $a_1 = r$, $n = 11$.

Demonstrație. Am văzut că T.3. este propoziție adevărată, iar între măsura unghiului descris de minutar și măsura unghiului descris de orar există relația: $U_{mi} = 12\, U_{Ol}$, rezultă că și T.4. este propoziție adevărată, adică șirul:

$$12 \cdot \frac{360^0}{11}, 24 \cdot \frac{360^0}{11}, 36 \cdot \frac{360^0}{11}, ..., 132 \cdot \frac{360^0}{11}$$

formează o progresie aritmetică.



T.5. *Punctele de pe cadranul ceasului corespunzătoare realizării unghiurilor nule, timp de 12 ore, formează un poligon regulat cu 11 laturi având vârful în sus (în 12 sau A_{44}) pe care-l notăm cu P_1 unde* $P_1 = A_4 A_8 A_{12} \ldots A_{44}$ *și care are ca axă de simetrie pe $A_{44}A_{22}$.*

Acest desen indică poziţia celor 11 puncte de forma A_{4k}, $k = \overline{1,11}$ unde se produc unghiurile nule dintre arătătoarele ceasului. Unind cele 11 puncte de pe cercul interior se obţine poligonul regulat P_1. Diametrul ce conţine pe A_{44} este o axă de simetrie a poligonului P_1.

B. Unghiuri alungite formate de acele ceasului

T.6. *Arătătoarele ceasului, timp de 12 ore, formează doar 11 unghiuri alungite.*

Demonstraţie. Se ştie că la ora 6, arătătoarele ceasului formează un unghi alungit (orarul este pe 6 iar minutarul pe 12) Pornim din această poziţie cu raţionamentul. Următoarea situaţie ca cele două ace ale ceasului să fie în prelungire se va crea în următorul context:

"În timp ce orarul parcurge x-minute, minutarul trebuie să parcurgă (x+60) minute sau, în timp ce orarul descrie un arc de y^0, minutarul trebuie să facă $(y+360)^0$ ". Enunţul poate fi încadrat în următoarea schemă:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \ldots\ldots\ldots 12 \\ x \text{ min} \ldots\ldots\ldots (x+360)\text{ min} \end{array}\right\} \text{ rezultă proporţia: } \frac{1}{x} = \frac{12}{x+360} \rightarrow x = \frac{60}{11} \text{ min}$$

iar $(x+60)\text{ min} = \left(\frac{60}{11} + 60\right)\text{ min} = 60 \cdot \frac{12}{11}\text{ min} = \frac{12}{11}\,h$

Deci timpul necesar pentru producerea unui unghi alungit este de $\frac{12}{11}\,h$ iar numărul tuturor unghiurilor alungite, timp de 12 ore, este de: $12\,h : \frac{12}{11}\,h = 11$.

T.7. *Orele exacte la care se produc aceste evenimente (poziţia orarului) formează o progresie aritmetică cu raţia:* $r = \frac{12}{11}\,h$, $a_1 = \frac{6}{11}\,h$, $n = 11$.

Demonstraţie. Şirul: $\frac{6}{11}\,h$, $\frac{18}{11}\,h$, $\frac{30}{11}\,h$, ... , $\frac{114}{11}\,h$, $\frac{126}{11}\,h$ formează o progresie aritmetică.

T.8. *Măsurile unghiurilor descrise de orar formează o progresie aritmetică cu raţia:* $r = \frac{360^0}{11}$, $a_1 = \frac{180^0}{11}$, $n = 11$.

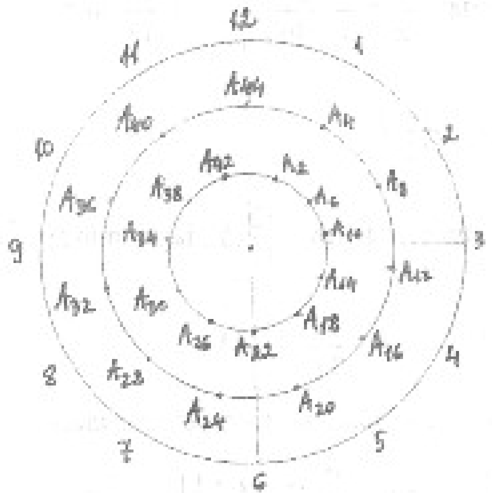
Demonstraţie. Şirul: $\frac{180^0}{11}, \frac{540^0}{11}, \frac{900^0}{11}, \ldots, \frac{3720^0}{11}$ formează progresie aritmetică.

T.9. *Măsurile unghiurilor descrise de minutar formează o progresie aritmetică cu raţia:* $r = 12\cdot\frac{360^0}{11}$, $a_1 = 12\cdot\frac{180^0}{11}$ *şi* $n = 11$.

T.10. *Punctele de pe cadran corespunzătoare acestor evenimente formează un poligon regulat P_2 cu 11 laturi având vârful în jos (în 6 sau A_{22}) şi care are ca axă de simetrie pe $A_{44}A_{22}$ unde* $P_2 = A_2A_6A_{10}A_{14}\ldots A_{42}$.

T.11. *Ceasul are doar 11 perechi de puncte diametral opuse. Câte un punct este vârf al poligonului P_1 iar celălalt punct diametral opus lui este vârf al poligonului P_2.*

Exemple de puncte diametral opuse: A_2 cu A_{24}; A_6 cu A_{28}; A_{10} cu A_{32} etc.



Pe acest desen sunt 3 cercuri concentrice. Pe cercul interior sunt aşezate punctele de forma A_{4k-2}, $k = \overline{1, 11}$ unde se produc unghiurile alungite dintre arătătoarele ceasului. Unind cele 11 puncte se obţine poligonul P_2. Diametrul ce conţine pe A_{22} este axă de simetrie a lui P_2. Pe cercul de rază mijlocie sunt vârfurile poligonului P_1.

C. Unghiuri drepte formate de acele ceasului

T.12. *Arătătoarele ceasului formează doar 22 de unghiuri drepte, timp de 12 ore de funcţionare.*

Demonstraţie. Se ştie că la orele 3 şi 9 ale ceasului se formează unghiuri drepte. La aceste ore minutarul se află pe 12 iar orarul este pe 3 sau pe 9. Pentru a determina timpul necesar producerii următorului unghi drept între arătătoarele ceasului, **pornim din 3** şi aplicăm următorul raţionament:

"În timp ce orarul va face x minute, minutarul trebuie să facă $(x+30)$ minute sau în timp ce orarul descrie un unghi de y^0, minutarul descrie un unghi de $(y+180^0)$ ". Aplicând regula de trei simplă obținem: $x=\frac{30}{11}$ min iar $(x+30)$ min $=\frac{6}{11}h$. Deci timpul necesar pentru a se produce următorul unghi drept, după ora 3, este de $\frac{6}{11}h$. Numărul tuturor unghiurilor drepte ce se formează, în timp de 12 h, este: $12h:\frac{6}{11}h=22$.

T.13. *Orele exacte la care se produc aceste evenimente formează o progresie aritmetică cu rația:* $r=\frac{6}{11}h$, $a_1=\frac{3}{11}h$ *și* $n=22$.

Demonstrație. Șirul: $\frac{3}{11}h$, $\frac{9}{11}h$, $\frac{15}{11}h$, ..., $\frac{129}{11}h$ formează progresie aritmetică.

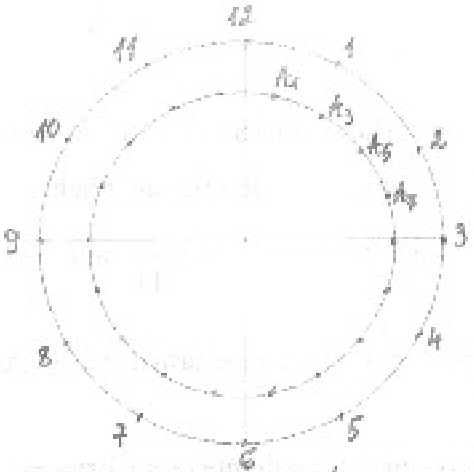
T.14. *Măsurile unghiurilor descrise de orar (corespunzătoare evenimentelor) formează o progresie aritmetică cu rația* $r=\frac{180^0}{11}$, $a_1=\frac{90^0}{11}$ *și* $n=22$.

Demonstrație. Șirul: $\frac{90^0}{11}$, $\frac{270^0}{11}$, $\frac{450^0}{11}$, ..., $\frac{3870^0}{11}$ formează progresie aritmetică.

T.15. *Măsurile unghiurilor descrise de minutar (corespunzătoare evenimentelor) formează o progresie aritmetică având rația*

$r=12\cdot\frac{180^0}{11}$, $a_1=\frac{90^0}{11}$ *și* $n=22$.

T.16. *Punctele de pe cadranul ceasului corespunzătoare acestor evenimente formează un poligon regulat* P_3 *cu 22 de laturi având ca axă de simetrie pe* $A_{11}A_{33}$ *unde* $P_3=A_1A_3A_5A_7\ldots A_{43}$.



Acest desen indică poziţia celor 22 de puncte de forma A_{2k-1}, $k = \overline{1,22}$ unde se produc unghiurile drepte dintre arătătoarele ceasului. Unind cele 22 de puncte se obţine poligonul P_3 cu 22 de laturi care are ca axă de simetrie pe $A_{11}A_{32}$.

T.17. *Orele exacte la care se produc cele 44 de evenimente remarcabile, în funcţionarea ceasului timp de 12 ore, formează o progresie aritmetică cu raţia* $r = \frac{3}{11}h$, $a_1 = \frac{3}{11}h$, $n = 44$. Şirul: $\frac{3}{11}h$, $\frac{6}{11}h$, $\frac{9}{11}h$, ..., $\frac{129}{11}h$, $\frac{132}{11}h$ formează progresie aritmetică.

T.18. *Punctele de pe cadranul ceasului corespunzătoare celor 44 de evenimente remarcabile formează un poligon regulat P_4 cu 44 de laturi unde* $P_4 = A_1A_2A_3...A_{44}$.

T.19. *Măsurile unghiurilor descrise de orar corespunzătoare celor 44 de evenimente remarcabile formează o progresie aritmetică cu raţia:* $r = \frac{90^0}{11}$, $a_1 = \frac{90^0}{11}$, $n = 44$.

T.20. *Măsurile unghiurilor descrise de minutar corespnzătoare celor 44 de evenimente formează o progresie aritmetică cu raţia:* $r = 12 \cdot \frac{90^0}{11}$, $a_1 = r$, $n = 44$.

D. Concluzii

Am văzut că, timp de 12 ore, în funcţionarea unui ceas se produc: 11 unghiuri nule, 11 unghiuri alungite şi 22 de unghiuri drepte. Deci există 44 de evenimente remarcabile.

Analizând şi interpretând rezultatele obţinute la paragrafele A, B şi C am dedus formulele cu ajutorul cărora putem exprima (descrie) aceste evenimente, după cum urmează:

I. Ora exactă (h_e) la care se produc unghiurile nule se calculează cu formula:

(1) $$h_e = 4k \cdot \frac{3}{11}h, \quad k = \overline{1,11};$$

(2) $$U_0 = 30^0 \cdot h_e \,;$$

(3) $$U_m = 12\, U_0$$

II. Ora exactă la care se produc unghiurile alungite se calculează cu formula:

(4) $$h_e = (4k+2)\cdot \frac{3}{11}\, h\,, \quad k = \overline{0\,,10}\,;$$

$$U_0 = 30^0 \cdot h_e\,; \quad U_m = 12\, U_0$$

III. Ora exactă la care se produc unghiurile drepte se calculează cu formula:

(5) $$h_e = (2k+1)\cdot \frac{3}{11}\, h\,, \quad k = \overline{0\,,21}$$

IV. Orele exacte la care se produc cele 44 de evenimente remarcabile în ordinea desfăşurării lor este dată de formula:

(6) $$h_e = k\cdot \frac{3}{11}\, h\,, \quad k = \overline{0\,,44}$$

V. Ora exactă la care se produce, între acele ceasului, unghiul cu măsura de n^0, $n \in (0\,,180)$ se poate calcula cu formulele:

(7) $$h_e'(n) = 4k\cdot \frac{3}{11}\, h + n\cdot \frac{1}{330}\, h\,,$$

şi

(8) $$h_e''(n) = 4(k+1)\cdot \frac{3}{11}\, h - n\cdot \frac{1}{330}\, h\,, \; k = \overline{1\,,11}$$

unde $h_e'(n)$ şi $h_e''(n)$ reprezintă orele exacte la care unghiul dintre acele ceasului este n^0. Pentru orice n dat există câte 22 de soluţii. Cu formulele (6), (7) şi (8) se pot verifica cele 44 de evenimente.Formulele (1)-(8) le numim formulele ceasului.

E. Măsura unghiului dintre acele ceasului

Există două situaţii:

1^0. Minutarul în faţa orarului

$$U(\measuredangle(m,O)) = 6^0 \cdot (\textit{numărul minutelor}) - 30^0 \cdot (\textit{numărul orelor}) =$$

$$= 6^0 \cdot (\textit{numărul minutelor} - 5 \cdot \textit{numărul orelor})$$

2^0. Orarul este în fața (înaintea) minutarului

$$U(\measuredangle(m,O)) = 6^0 \cdot (5 \cdot \textit{numărul orelor} - \textit{numărul minutelor})$$

Analizând cele două situații, observăm că ele pot fi contopite într-o singură formulă și anume:

(9) $$U(\measuredangle(m,O)) = 6^0 \cdot |x - 5 \cdot h_e|$$

unde x reprezintă numărul minutelor parcurse de minutar.

F. Timpi complementari (sau ore complementare)

Definiție. Doi timpi (sau două citiri de ceas) a căror sumă este egală cu 12 ore, îi numim **timpi complementari (sau ore complementare)**.

T.21. *Dacă doi timpi sunt complementari atunci măsurile unghiurilor dintre arătătoarele ceasului sunt egale.*

Demonstrație. Fie h_e' și h_e'' cei doi timpi astfel încât: $h_e' + h_e'' = 12\,h \rightarrow h_e'' = 12 - h_e'$ iar $x'' = 60 - x'$, atunci

$$U'(\measuredangle(m,O)) = 6^0 \cdot |x' - 5h_e'|,$$

iar $$U''(\measuredangle(m,O)) = 6^0 \cdot |60 - x' - 5(12 - h_e')| = 6^0 \cdot |5h_e' - x'|.$$

În final rezultă $$U'(\measuredangle(m,O)) = U''(\measuredangle(m,O)).$$

Exemplu. Fie $h_e' = 6^{\underline{50}} = 6\,h\,50\text{ min} = 6\frac{5}{6}\,h$ și $h_e'' = 5^{\underline{10}} = 5\frac{1}{6}\,h$,

$$h_e' + h_e'' = 12\,h,\; x' = 50\text{ min},\; x'' = 10\text{ min}.$$

$$U'(\measuredangle(m,O)) = 6^0 \cdot \left|50 - 5 \cdot 6 \cdot \frac{5}{6}\right| = 6^0 \cdot \left|50 - \frac{205}{6}\right| = 6^0 \cdot \frac{95}{6} = 95^0$$

iar $$U''(\measuredangle(m,O)) = 6^0 \cdot \left|5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{6} - 10\right| = 6^0 \cdot \left|\frac{155}{6} - 10\right| = 6^0 \cdot \frac{95}{6} = 95^0$$

deci $U'(\measuredangle(m,O)) = U''(\measuredangle(m,O))$

ALGEBRA ŞI TRIGONOMETRIA CEASULUI

Ceasului ca model matematic, i se asociază ecuaţia: $x^{44} - 1 = 0$ care are 44 de soluţii complexe. Fie a o rădăcină, atunci $a = \cos\frac{2\pi}{44} + i\sin\frac{2\pi}{44}$. Imaginile acestor numere complexe sunt cele 44 de puncte de diviziune în care am împărţit cercul cu raza 1. Ele sunt vârfuri pentru poligonul regulat convex sau stelat cu 44 de laturi şi ca numere formează faţă de înmulţirea numerelor complexe **un grup G** cu 44 de elemente. Argumentele numerelor complexe din G şi mulţimea **rotaţiilor** de aceste unghiuri formează un **grup R izomorf cu G**. Toate notaţiile din R reduc poligonul regulat (convex sau stelat) în tiparul iniţial permutându-i doar vârfurile. Deci aceste poligoane sunt invarianţi faţă de grupul R.

Fie ecuaţia $x^{44} - 1 = 0$; $x = \cos\frac{2k\pi}{44} + i\sin\frac{2k\pi}{44} = \cos\frac{k\pi}{22} + i\sin\frac{k\pi}{22}$; $k = \overline{0,43}$

Pentru $k=10$, $x_1=\cos\frac{10\pi}{22}+i\sin\frac{10\pi}{22}$; A_1; $k=32$, $x_{23}=\cos\frac{32\pi}{22}+i\sin\frac{32\pi}{22}$; A_{23};

Pentru $k=9$, $x_2=\cos\frac{9\pi}{22}+i\sin\frac{9\pi}{22}$; A_2; $k=31$, $x_{24}=\cos\frac{31\pi}{22}+i\sin\frac{31\pi}{22}$; A_{24}

⋮ ⋮

Pentru $k=0$, $x_{11}=\cos 0+i\sin 0=1$; A_{11}; $k=22$, $x_{33}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$; A_{33}

ora 3 *ora* 9

pentru $k=43$, $x_{12}=\cos\frac{43\pi}{22}+i\sin\frac{43\pi}{22}$; A_{12}; $k=21$, $x_{34}=\cos\frac{21\pi}{22}+i\sin\frac{21\pi}{22}$; A_{34}

⋮ ⋮

pentru $k=33$, $x_{22}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$; A_{22}; $k=11$, $x_{44}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$; A_{44}

ora 6 *ora* 12

Cele 44 de evenimente se desfăşoară, după pornirea ceasului, în următoarea ordine: unghi drept, unghi alungit, unghi drept, unghi nul şi ciclul se reia.

Cele 44 de evenimente remarcabile sunt trecute în tabel.

Nr ev	Unghiuri drepte	Nr ev	Unghiuri alungite	Nr. ev.	Unghiuri drepte	Nr ev.	Unghiuri nule
1	$1\cdot\frac{3}{1}h=\frac{180}{11}\text{min}$ $=16\frac{4}{11}\text{min}$ $U_{01}=1\cdot\frac{90^0}{11}$; $U_{m1}=12\cdot\frac{90^0}{11}$	2	$2\cdot\frac{3}{11}h=\frac{6}{11}h$ $=\frac{360}{11}\text{min}$ $U_{02}=2\cdot\frac{90^0}{11}$; $U_{m2}=12\,U_{02}$	3	$3\cdot\frac{3}{11}h=\frac{9}{11}h$ $=\frac{540}{11}\text{min}$ $U_{03}=3\cdot\frac{90^0}{11}$; $U_{m3}=12\,U_{03}$	4	$4\cdot\frac{3}{11}h=\frac{12}{11}h$ $=1h5\frac{5}{11}\text{min}$ $U_{04}=4\cdot\frac{90^0}{11}$; $U_{m4}=12\,U_{04}$
5	$5\cdot\frac{3}{11}h=$ $1h21\frac{9}{11}\text{min}$ $U_{05}=5\cdot\frac{90^0}{11}$; $U_{m5}=12\cdot U_{05}$	6	$6\cdot\frac{3}{11}h=$ $1h38\frac{2}{11}\text{min}$ $U_{06}=6\cdot\frac{90^0}{11}$;	7	$7\cdot\frac{3}{11}h=$ $1h54\frac{6}{11}\text{min}$ $U_{07}=7\cdot\frac{90^0}{11}$;	8	$8\cdot\frac{3}{11}h=$ $2h10\frac{10}{11}\text{min}$ $U_{08}=8\cdot\frac{90^0}{11}$;
9	$h_{e9}=9\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{09}=9\cdot\frac{90^0}{11}$	10	$h_{e10}=10\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{010}=10\cdot\frac{90^0}{11}$;	11	$h_{e11}=11\cdot\frac{3}{11}h=3h$ $U_{011}=11\cdot\frac{90^0}{11}=90^0$	12	$h_{e12}=12\cdot\frac{3}{11}h$ $=3h16\frac{4}{11}\text{min}$ $U_{012}=12\cdot\frac{90^0}{11}$
13	$h_{e13}=13\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{00}=13\cdot\frac{90^0}{11}$	14	$h_{e14}=14\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{014}=14\cdot\frac{90^0}{11}$;	15	$h_{e15}=15\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{015}=15\cdot\frac{90^0}{11}$	16	$h_{e16}=16\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{016}=16\cdot\frac{90^0}{11}$
17	$h_{e17}=17\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{017}=17\cdot\frac{90^0}{11}$	18	$h_{e18}=18\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{018}=18\cdot\frac{90^0}{11}$;	19	$h_{e19}=19\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{019}=19\cdot\frac{90^0}{11}$	20	$h_{e20}=20\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{020}=20\cdot\frac{90^0}{11}$

21	$h_{a21}=21\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O21}=21\cdot\frac{90^0}{11}$	22	$h_{a22}=22\cdot\frac{3}{11}h$ $=6h$ $U_{O22}=22\cdot\frac{90^0}{11}=180$	23	$U_{O23}=23\cdot\frac{90^0}{11}$ $h_{a23}=23\cdot\frac{3}{11}h$	24	$h_{a24}=24\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O24}=24\cdot\frac{90^0}{11}$
25	$h_{a25}=25\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O25}=25\cdot\frac{90^0}{11}$	26	$h_{a26}=26\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O26}=26\cdot\frac{90^0}{11}$	27	$h_{a27}=27\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O27}=27\cdot\frac{90^0}{11}$	28	$h_{a28}=28\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O28}=28\cdot\frac{90^0}{11}$
29	$h_{a29}=29\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O29}=29\cdot\frac{90^0}{11}$	30	$h_{a30}=30\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O30}=30\cdot\frac{90^0}{11}$	31	$h_{a31}=31\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O31}=31\cdot\frac{90^0}{11}$	32	$h_{a32}=32\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O32}=32\cdot\frac{90^0}{11}$
33	$h_{a33}=33\cdot\frac{3}{11}h$ $=9h$ $U_{O33}=$ $=33\cdot\frac{90^0}{11}=270^0$	34	$h_{a34}=34\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O34}=34\cdot\frac{90^0}{11}$	35	$h_{a35}=35\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O35}=35\cdot\frac{90^0}{11}$	36	$h_{a36}=36\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O36}=36\cdot\frac{90^0}{11}$
37	$h_{a37}=37\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O37}=37\cdot\frac{90^0}{11}$	38	$h_{a38}=38\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O38}=38\cdot\frac{90^0}{11}$	39	$h_{a39}=39\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O39}=39\cdot\frac{90^0}{11}$	40	$h_{a40}=40\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O40}=40\cdot\frac{90^0}{11}$
41	$h_{a41}=41\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O41}=41\cdot\frac{90^0}{11}$	42	$h_{a42}=42\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O42}=42\cdot\frac{90^0}{11}$	43	$h_{a43}=43\cdot\frac{3}{11}h$ $U_{O43}=43\cdot\frac{90^0}{11}$	44	$h_{a44}=44\cdot\frac{3}{11}h$ $=12h$ $U_{O44}=44\cdot\frac{90^0}{11}=$ $=360^0$

Explicitarea câtorva evenimente.

Folosim notațiile de la pagina 148.

Pentru $i=1$, obținem primul eveniment, de la pornirea ceasului, care este unghiul drept $h_{e1}=1\cdot\frac{3}{11}h=\frac{3}{11}h=60\cdot\frac{3}{11}\min=\frac{180}{11}\min=16\frac{4}{11}\min=16\min 21\frac{9}{11}s$ – ora exactă;

$U_{O1}=1\cdot\frac{90^0}{11}=\frac{90^0}{11}=8^0 10' 54\frac{6''}{11}$ – măsura unghiului descris de orar;

$U_{m1}=12\,U_{O1}=12\cdot\frac{90^0}{11}=98^0 10' 54\frac{6''}{11}$ – măsura unghiului descris de minutar.

Se observă că: $U_{m1}-U_{O1}=90^0$ căci $U_{m1}-U_{O1}=12\,U_{O1}-U_{O1}=11\,U_{O1}=11\cdot\frac{90^0}{11}=90^0$

Pentru $i=2$, obținem: $h_{e2}=2\cdot\frac{3}{11}h=\frac{6}{11}h=\frac{360}{11}\min=32\min 43\frac{7}{11}s$

Acest timp reprezintă ora exactă la care se produce primul unghi alungit, de la pornirea ceasului.

$$U_{O2}=2\cdot\frac{90^0}{11}=\frac{180^0}{11}=16^0 21' 49\frac{1''}{11}$$

$$U_{m2}=12\cdot U_{O1}=12\cdot\frac{180^0}{11}=196^0 21' 49\frac{1''}{11}$$

$$U_{m2}-U_{O1}=180^0\ .$$

Pentru $i=3$, obținem: $h_{e3}=3\cdot\frac{3}{11}h=\frac{9}{11}h=\frac{540}{11}\min=49\min 5\frac{5}{11}s$

Acest timp reprezintă ora exactă la care se produce al doilea unghi drept de la pornirea ceasului. $U_{O3}=3\cdot\frac{90^0}{11}=\frac{270^0}{11}=24^0 32' 43\frac{7''}{11}$

$$U_{m3}=12\cdot U_{O2}=12\cdot\frac{270^0}{11}=294^0 32' 43\frac{7''}{11}$$

$U_{m3} - U_{03} = 270^0$; $360^0 - 270^0 = 90^0$.

Pentru $i = 4$, obţinem: $h_{a4} = 4 \cdot \frac{3}{11} h = \frac{12}{11} h = \frac{720}{11} \min = 1 h\, 5 \min 27 \frac{3}{11} s$

Acest timp reprezintă ora exactă la care se produce primul unghi nul, de la pornirea ceasului.

$U_{O4} = 4 \cdot \frac{90^0}{11} = \frac{360^0}{11} = 32^0 43' 38 \frac{2''}{11}$ - măsura unghiului descris de orar.

$U_{m4} = 12 \cdot U_{O4} = 392^0 43' 38 \frac{2''}{11}$ - măsura unghiului descris de minutar.

$U_{m4} - U_{O4} = 360^0$. Analog se explicitează şi celelalte evenimente.

MATEMATICA CEASULUI

Pe următorul desen sunt reprezentate 5 cercuri concentrice. Le discutăm din interior spre exterior.

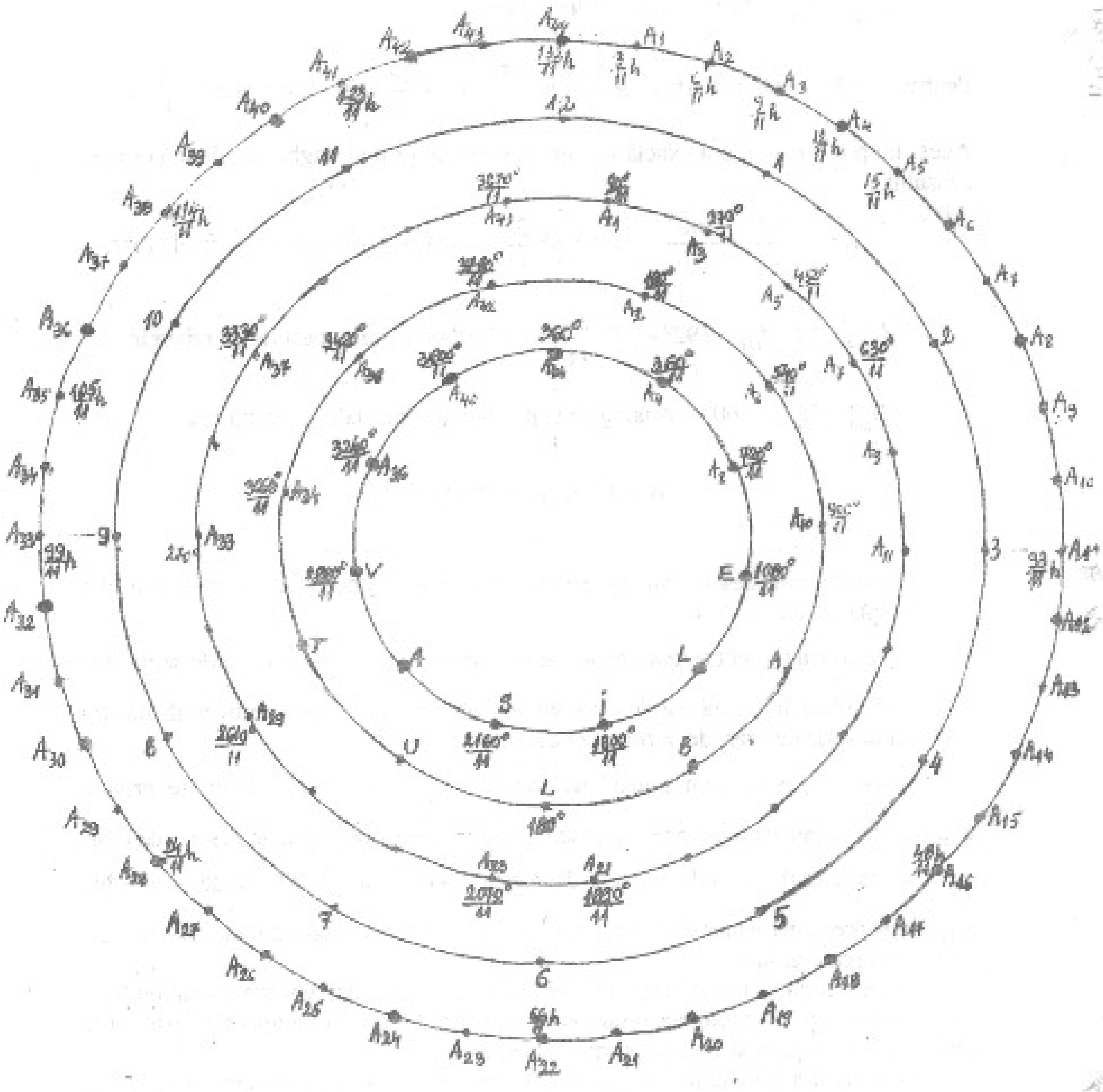
- Pe cercul C_1 sunt aşezate punctele de forma A_{4k} , $k = \overline{1,11}$ unde se produc unghiurile nule dintre arătătoarele ceasului iar numerele însoţitoare reprezintă măsura unghiuli descris de orar, de la pornirea ceasului.

- Pe cercul C_2 sunt puncte de forma A_{4k-2} , $k = \overline{1,11}$ unde se produc unghiurile alungite iar numerele însoţitoare reprezintă măsura unghiului descris de orar.

- Pe cercul C_3 sunt punctele de forma A_{2k-1} , $k = \overline{1,22}$ unde se produc unghiurile drepte iar numerele însoţitoare reprezintă măsura unghiului descris de orar, de la pornirea ceasului.

- Pe cercul exterior sunt cele 44 de puncte corespunzătoare evenimentelor remarcabile din funcţionarea unui ceas, timp de 12 ore iar numerele însoţitoare reprezintă ora exactă la care se produce evenimentul.

Abordarea subiectului în mai multe moduri (aritmetic, geometric, algebric şi trigonometric) justifică titlul prezentei lucrări.



THE MATHEMATICS OF THE CLOCK

Abstract. One of the greatest discoveries of man was and will remain the invention of the device which measures the passing of time: the clock.

We consider a clock with a minute hand and an hour hand (this variant produces the slightest error in the longest period) under the conditions of perfect functioning, and we call such a device **mathematical clock**.

Studying the position of the minute hand and hour hand, the following noticeable events will take place during 12 hours:

a) At 12 o'clock (or zero) the null angle is formed.

b) At 6 o'clock the long angle is formed.

c) At 3 and 9 o'clock right angles are formed.

During twelve hours this kind of events happen not only once.

Our paper's aim is to study:

i) How many events of the types' a), b), and c) exist.

ii) The exact hours they happen at.

iii) The order these events happen in.

iv) The measure of the angle which corresponds to each event, described by the hour hand and the minute hand respectively.

v) Relations between the time units and the arc units. The formulae of the clock, corresponding to different events.

vi) The measure of the angle between the minute hand and the hour hand.

We organized our paper as follows: The Arithmetics of the Clock; The Geometry of the Clock; The Algebra of the Clock; The Trigonometry of the Clock.

Primit: 01.04.1999

Scoala Generală Nr.6
Baia Mare