Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 9(1999-2000), 1 - 14

ŞIRUL LALESCU LA O SUTĂ DE ANI

D. M. BĂTINEŢU-GIURGIU şi Augustin SEMENESCU

La 15 septembrie 2000 s-au împlinit 105 ani de apariţie neîntrerupta a **Gazetei Matematice**. Unele dintre problemele publicate în această prestigioasă publicaţie au trezit un interes deosebit dintre care amintim.

a) Problema **16** din **Gazeta Matematică** nr. 2, vol. I (1895-1896), pag. 39, având ca autor pe unul dintre cei patru stâlpi ai **Gazetei Matematice** adică pe *Andrei G. Ioachimescu* (1868-1943) cerea să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-2\sqrt{n}\right) \tag{1}$$

b) Problema **579** din **Gazeta Matematică**, vol. VI (1900-1901), pag. 148, având drept autor pe marele matematician român *Traian Lalescu* (1882-1929), cerea să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right) \tag{2}$$

După cum se poate vedea în curând se implinesc o suta de ani de la aparitia celebrului sir al lui *Traian Lalescu*.

Cercetările privind sirul lui *Traian Lalescu* (de fapt conditiile de aplicare a reciprocei teoremei *Cesaro-Stolz*) au fost deschise de *Mihail Ghermanescu* (1899-1962) prin nota matematica **Asupra teoremei lui Cesaro**, publicata in **Gazeta Matematica** vol. XLI, anul 1936, pag. 89-92. Problema a fost readusa in studiu de catre *Tiberiu Popoviciu* in articolul **Asupra calculului unei limite**, articol publicat in **Gazeta Matematica**, seria A, nr.1/1971, pag. 8-11.

Studiile initiate de catre *Tiberiu Popoviciu* au mobilizat multi cercetatori români pentru care recomandam bibliografia acestei lucrari.

Din studiul acestei ample bibliografii se poate constata ca pe parcursul a o suta de ani de studiere a problemei **579** au fost introduse noi concepte pe aceste idei dintre care remarcam: siruri *Lalescu*, operatori *Lalescu*, siruri *Lalescu* ponderate, siruri *Batinetu-Giurgiu*, functii *Euler-Lalescu*, functii *Lalescu*, functii *Lalescu* ponderate, etc. De asemenea au fost elaborate numeroase metode de abordare a problemelor de acest tip. Printre cei care au elaborat metode interesante de abordare a problemelor de tip *Lalescu* mentionam pe : *D.M. Batinetu-Giurgiu*, *Marcel Tena*, *Mihály Bencze*, *Tanase Negoi* si *Mihai Dicu*.

Mai aratam ca un interes deosebit pentru probleme de acest tip il prezinta unele siruri, dintre care mentionam:

1. Sirul lui *Traian Lalescu* , de termen general

$$L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\,, \quad n \geq 2 \tag{3}$$

Acest sir constituie subiectul problemei **579** din **Gazeta Matematica**, vol. VI, (1900-1901), pag. 148.

2. Sirul lui *Romeo T. Ianculescu* , de termen general

$$I_n = (n+1)\cdot \sqrt[n+1]{n+1} - n \cdot \sqrt[n]{n}\,, \quad n \geq 2 \tag{4}$$

Acest sir constituie subiectul problemei **2042** din **Gazeta Matematica**, vol. XIX, (1913-1914), pag. 160.

3. Sirul lui *Mihail Ghermanescu* , de termen general

$$G_n = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n} - \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\,, \quad n \in \mathbf{N}^* \tag{5}$$

Acest sir constituie subiectul problemei **4600** din **Gazeta Matematica**, vol. XLI, (1935-1936), pag. 216.

4. Sirul lui *D.M.Batinetu-Giurgiu* , de termen general

$$B_n = \frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\,, \; n \geq 2 \tag{6}$$

Acest sir constituie subiectul problemei **C:890** din **Gazeta Matematica**, vol. XCIV, (1989), pag. 139.

Sa consideram acum un sir de numere reale strict pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$.

Propozitia 1 . Daca exista $s \geq 0$ si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{n^s} = r > 0$, atunci exista

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{x^{s+1}} = \frac{r}{s+1} \tag{7}$$

Demonstratie . Conform teoremei *Cesaro-Stolz* , exista

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{s+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{(n+1)^{s+1} - n^{s+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}-a_n}{n^s} \cdot \frac{n^s}{(n+1)^{s+1} - n^{s+1}} \right) = \frac{r}{s+1}\,.$$

Propoziţia 2 . Daca exista $s \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_n}{n^{s+1}} = a > 0$ si exista $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = b > 0$, atunci exista

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n^s} = a \cdot \ln b \tag{8}$$

Demonstraţie . Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^{s+1}} = a$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ si deci notqnd $u_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $n \in \mathbf{N}^*$ rezulta ca $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n - 1}{\ln u_n} = 1$.

Prin urmare ,

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{n^s} = \frac{a_n}{n^{s+1}} \cdot \frac{u_n - 1}{\ln u_n} \cdot \ln u_n^n , \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$

de unde prin trecere la limita deducem ca $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{n^{s+1}} = a \cdot \ln b$.

Observatie . Din propozitiile precedente rezulta ca

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{s+1}} = \frac{1}{s+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n^s} = \frac{1}{s+1} \cdot a \cdot \ln b$$

de unde deducem $b = s + 1$ adica $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = \mathbf{e}^{s+1}$.

Propoziţia 3 . Fie $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ siruri de numere reale strict pozitive astfel incât $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = u > 0$ si $\lim\limits_{n\to\infty} (v_{n+1} - v_n) = v > 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} (v_{n+1} \sqrt[n+1]{u_{n+1}} - v_n \cdot \sqrt[n]{u_n}) = u \cdot v \tag{9}$$

(De fapt acesta este enuntul problemei **C:844** din **G.M.**, a se vedea [5]).

Demonstratie . Este evident ca $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = u$ si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{v_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (v_{n+1} - v_n) = v$. Prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} (v_{n+1} \cdot \sqrt[n+1]{u_{n+1}} - v_n \cdot \sqrt[n]{u_n}) = \lim_{n\to\infty} (v_n \cdot \sqrt[n]{u_n} \cdot (w_n - 1)) \tag{10}$$

unde $w_n = \dfrac{v_{n+1} \cdot \sqrt[n+1]{u_{n+1}}}{v_n \cdot \sqrt[n]{u_n}}$, $\forall n \geq 2$ si $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 1$.

Conform (10) avem

$$\lim_{n\to\infty} (v_{n+1} \cdot \sqrt[n+1]{u_{n+1}} - v_n \cdot \sqrt[n]{u_n}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{v_n}{n} \cdot \sqrt[n]{u_n} \cdot \frac{w_{n-1}}{\ln w_n} \cdot \ln w_n^n\right) = a \cdot b \cdot \ln \lim_{n\to\infty} w_n^n \tag{11}$$

Totodata avem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} w_n^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{u_{n+1}^n}}{u_n} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{u_{n+1}}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)^n = \\ &= u\cdot\frac{1}{u}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{v_{n+1}-v_n}{v_n}\right)^n = \mathbf{e}^t\end{aligned}$$

unde

$$t = \lim_{n\to\infty}\left((v_{n+1}-v_n)\cdot\frac{n}{v_n}\right) = v\cdot\frac{1}{v} = 1$$

adica $\lim\limits_{n\to\infty} w_n^n = \mathbf{e}$ si atunci din (11) rezulta ca

$$\lim_{n\to\infty}(v_{n+1}\cdot\sqrt[n+1]{u_{n+1}} - v_n\cdot\sqrt[n]{u_n}) = a\cdot b\cdot\ln\mathbf{e} = a\cdot b\,.$$

Consideram in continuare sirurile de numere reale strict pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$, $(r_n)_{n\geq 1}$ astfel incât :

$$a_{n+1} = a_n + r_n,\ \forall n\in\mathbf{N}^* \quad \text{si} \quad \lim_{n\to\infty} r_n = r > 0\,.$$

Mai consideram functiile $f_n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+^*$, $f_n(x) = \left(\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^x\right)^{\frac{1}{x}}$ pentru $x\in\mathbf{R}_+^*$ si $f_n(0) = \lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ldots a_n} = \sqrt[n]{a_n!}$, $n\geq 2$ si ne propunem sa aratam ca

$$L(x) = \lim_{n\to\infty}(f_{n+1}(x)-f_n(x)) = \begin{cases}\dfrac{r}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}, & x\in\mathbf{R}_+^* \\ \dfrac{r}{\mathbf{e}}, & x=0\end{cases} \tag{12}$$

Pentru $x>0$ procedam astfel . Calculam

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f_n(x)}{n}\right)^x = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1^x+a_2^x+\ldots+a_n^x}{n^{1+x}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^x}{(n+1)^{x+1}-n^{x+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)^x\cdot\frac{n^x}{(n+1)^{x+1}-n^{x+1}}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^x\right) = r^x\cdot\frac{1}{x+1}$$

de unde obtinem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(x)}{n} = \frac{r}{(x+1)^{\frac{1}{x}}}, \quad \text{pentru } x>0. \tag{13}$$

In continuare notam $g_n(x) = \dfrac{a_{n+1}^x}{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $x > 0$, observam ca $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ si calculam

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x + a_{n+1}^x\right)}{(n+1)\left(a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x\right)}\right)^{\frac{n}{x}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{x}} \cdot \lim_{n\to\infty}(1 + g_n(x))^{\frac{n}{x}} =$$

$$= \mathbf{e}^{-\frac{1}{x}} \cdot \lim_{n\to\infty}\left((1 + g_n(x))^{\frac{1}{g_n(x)}}\right)^{\frac{n \cdot g_n(x)}{x}} = \mathbf{e}^{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot g_n(x)} \qquad (14)$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty}(n \cdot g_n(x)) = \lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \frac{a_{n+1}^x}{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \cdot \left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)^x \cdot \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)^x}{a_1^x + a_2^x + \ldots a_n^x} =$$

$$= r^x \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{x+1} - n^{x+1}}{n^x} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{a_n}\right)^x = r^x \cdot (x+1)$$

iar relatia (14) devine

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right)^n = \mathbf{e}^{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x}(x+1)} = \mathbf{e} \qquad (15)$$

Conform propozitiilor 1 si 2 cu $s = 0$ obtinem

$$L(x) = \frac{r}{(x+1)^{\frac{1}{x}}} \cdot \ln \mathbf{e} = \frac{r}{(x+1)^{\frac{1}{x}}} \qquad (16)$$

Pentru $x = 0$ avem de calculat

$$\lim_{n\to\infty}(f_{n+1}(0) - f_n(0)) = L(0) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{a_{n+1}!} - \sqrt[n]{a_n!}\right),$$

unde $a_n! = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.

Prin urmare calculam

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a_n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a_n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{\mathbf{e}_n}\right)=\frac{r}{\mathbf{e}}$$

si

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}!}}{\sqrt[n]{a_n!}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}!}{a_n!}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}!}}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}!}}\right)=r\cdot\frac{\mathbf{e}}{r}=\mathbf{e}\,.$$

Conform propozitiilor 1 si 2 rezulta ca

$$L(0)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{a_{n+1}!}-\sqrt[n]{a_n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a_n!}}{n}\cdot\ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}!}}{\sqrt[n]{a_n!}}\right)^n=$$
$$=\frac{r}{\mathbf{e}}\cdot\ln\mathbf{e}=\frac{r}{\mathbf{e}}\,.$$

Deci

$$L(x)=\begin{cases}\dfrac{r}{(x+1)^{\frac{1}{x}}}\,, & x>0\\[2ex] \dfrac{r}{\mathbf{e}}\,, & x=0\end{cases}\qquad(17)$$

Observatie . Pentru $r_n=1$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $a_1=1$ obtinem

$$L(0)=\lim_{n\to\infty}(f_{n+1}(0)-f_n(0))=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\frac{1}{\mathbf{e}}$$

adica limita sirului lui *Lalescu* .

Fie $f:\mathbf{R}_+^*\to\mathbf{R}_+^*$ o functie continua astfel incât $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x+1)-f(x))=$ $=r\in\mathbf{R}_+^*$ si exista $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Atunci ,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)}{x}=r\qquad(18)$$

Intr-adevar ,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbf{N}^*}}\frac{f(x)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}(f(n+1)-f(n))=r\,.$$

In continuare consideram $s \in \mathbf{R}_+^*$ si definim functia

$$g_s(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x} \cdot \int_0^x f^s(t)dt\right)^{\frac{1}{s}} & , s > 0 \\ \mathbf{e}^{\frac{1}{x} \cdot \int_0^x \ln f(t)dt} & , s = 0 \end{cases} \tag{19}$$

Propozitia 4. Sa se demonstreze ca

$$\lim_{x \to \infty} g_s'(x) = \begin{cases} \frac{r}{(1+s)^{\frac{1}{s}}} & , s > 0 \\ \frac{r}{\mathbf{e}} & , s = 0 \end{cases} \tag{20}$$

Demonstratie . Pentru $s > 0$, consideram $F_s : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$, $F_s(x) = \int_0^x f^s(t)dt$ deoarece f este continua rezulta ca F_s este derivabila si $F_s'(x) = f^s(x)$. Sa observam ca pentru $s > 0$

$$\begin{aligned} g_s'(x) &= \left(\left(\frac{F_s(x)}{x}\right)^{\frac{1}{s}}\right)' = \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{F_s(x)}{x}\right)^{\frac{1}{s}-1} \cdot \frac{x \cdot F_s'(x) - F_s(x)}{x^2} = \\ &= \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{x^{1+\frac{1}{s}}} \cdot F_s^{\frac{1}{s}-1}(x \cdot f^s(x) - F_s(x)) = \\ &= \frac{1}{s \cdot x^{\frac{1}{s}}} \cdot \frac{(F_s(x))^{\frac{1}{s}} \cdot f^s(x)}{F_s(x)} - \frac{1}{s \cdot x^{1+\frac{1}{s}}}(F_s(x))^{\frac{1}{s}} . \end{aligned}$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} g_s'(x) &= \frac{1}{s} \cdot \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^s \cdot \lim_{x\to\infty} \left(\frac{F_s(x)}{x^{s+1}}\right)^{\frac{1}{s}-1} - \\ &- \frac{1}{s} \cdot \lim_{x\to\infty} \left(\frac{F_s(x)}{x^{1+s}}\right)^{\frac{1}{s}} = \\ &= \frac{1}{s} \cdot r^s \cdot \lim_{x\to\infty} \left(\frac{F_s(x)}{x^{s+1}}\right)^{\frac{1}{s}-1} - \frac{1}{s} \cdot \lim_{x\to\infty} \left(\frac{F_s(x)}{x^{s+1}}\right)^{\frac{1}{s}} \end{aligned} \tag{21}$$

Totodata avem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F_s(x)}{x^{s+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{F_s'(x)}{(s+1)\cdot x^s}=\lim_{x\to\infty}\frac{f^s(x)}{x^s}\cdot\frac{1}{s+1}=\frac{r^s}{s+1}$$

si atunci din relatia precedenta obtinem ca

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} g_s'(x) &= \frac{1}{s}\cdot r^s\cdot\left(\frac{r^s}{s+1}\right)^{\frac{1}{s}-1}-\frac{1}{s}\cdot\left(\frac{r^s}{s+1}\right)^{\frac{1}{s}}=\\ &=\frac{1}{s}\cdot\frac{r^{s+1-s}}{(s+1)^{\frac{1}{s}}}\cdot(s+1)-\frac{1}{s}\cdot\frac{r}{(s+1)^{\frac{1}{s}}}=\\ &=\frac{1}{s}\cdot\frac{r}{(s+1)^{\frac{1}{s}}}\cdot(s+1-1)=\frac{r}{(s+1)^{\frac{1}{s}}}.\end{aligned}$$

Pentru $s=0$ avem $g_0(x)=\mathbf{e}^{\frac{1}{x}\cdot\int_0^x \ln f(t)dt}$ si deci

$$g_0'(x)=g_0(x)\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot\int_0^x\ln f(t)dt\right)'=g_0(x)\cdot\left(\frac{F_0(x)}{x}\right)'=$$

$$=g_0(x)\cdot\frac{F_0'(x)\cdot x-F_0(x)}{x^2}=g_0(x)\cdot\left(\frac{\ln f(x)}{x}-\frac{F_0(x)}{x^2}\right)=$$

$$=\frac{g_0(x)}{x}\cdot\left(\ln f(x)-\frac{F_0(x)}{x}\right)=\frac{g_0(x)}{x}\cdot\left(\ln f(x)-\frac{1}{x}\cdot\int_0^x\ln f(t)dt\right)=$$

$$=\frac{g_0(x)}{x}\cdot\left(\ln f(x)-\ln\mathbf{e}^{\frac{1}{x}\cdot\int_0^x ln f(t)dt}\right)=\frac{g_0(x)}{x}(\ln f(x)-\ln g_0(x))=$$

$$=\frac{g_0(x)}{x}\cdot\ln\frac{f(x)}{g_0(x)}.$$

Deci

$$\lim_{x\to\infty} g_0'(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{g_0(x)}{x}\cdot\ln\left(\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x}{g_0(x)}\right)\right) \tag{22}$$

Sa calculam

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g_0(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{e}^{\frac{1}{x}\cdot F_0(x)}}{x}=\lim_{x\to\infty}\mathbf{e}^{\frac{1}{x}\cdot F_0(x)-\ln x}=\mathbf{e}^h \tag{23}$$

unde

$$h = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot F_0(x) - \ln x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\int_0^x \ln f(t)dt - \ln x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\int_0^x \ln f(t)\,dt - \frac{1}{x}\cdot\int_0^x \ln t\,dt + \frac{1}{x}\cdot\int \ln t\,dt - \ln x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\int_0^x \ln\frac{f(t)}{t}\,dt + \frac{1}{x}\cdot x(\ln x - 1) - \ln x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x \ln\frac{f(t)}{t}\,dt}{x} - 1 = -1 + \lim_{x\to\infty}\left(\int_0^x \ln\frac{f(t)}{t}\,dt\right)' =$$

$$= -1 + \lim_{x\to\infty}\ln\frac{f(x)}{x} = -1 + \ln r$$

si atunci din (23) deducem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g_0(x)}{x} = \mathbf{e}^h = \mathbf{e}^{-1+\ln r} = \frac{r}{\mathbf{e}}\,.$$

Revenind la relatia (22) obtinem ca

$$\lim_{x\to\infty} g_0'(x) = \frac{r}{\mathbf{e}}\cdot\ln\left(r\cdot\frac{\mathbf{e}}{r}\right) = \frac{r}{\mathbf{e}}\cdot\ln\mathbf{e} = \frac{r}{\mathbf{e}}\,.$$

Bibliografie

[1] **Bătineţu M.D.**, SIRURI, Editura Albatros, Bucuresti 1979

[2] **Bătineţu M.D.**, O PROBLEMA CU ... PROBLEME, R.M.T. anul XI, nr. 1-2/1980, pag. 31-36

[3] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, SIRURI LALESCU, R.M.T., anul XX, nr. 1-2/1989, pag. 33-36

[4] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, OPERATORUL LALESCU. PROPRIETATI. APLICATII. R.M.G., nr.8/1989, pag. 22-27

[5] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, PROBLEMELE, **17668 , 21589 , C: 844, C: 855** SI **C: 890**, Gazeta Matematica (**G.M.**)

[6] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, SIRURILE LALESCU SI FUNCTIA LUI EULER DE SPETA A DOUA, FUNCTII EULER-LALESCU, Gazeta Matematica seria A, nr. 1/1990, pag. 21-26

[7] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, ASUPRA UNEI GENERALIZARI A SIRULUI LUI TRAIAN LALESCU. METODE DE ABORDARE, Gazeta Matematica nr. 8-9/1990, pag. 219-224

[8] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, STUDIUL, APROFUNDAREA SI DEZVOLTAREA TEZAURULUI MATEMATIC ROMÂNESC, MIJLOC DE EDUCATIE, Lucrare premiata cu PREMIUL I pe tara la Simpozionul CREATIVTITATE SI EFICIENTA IN INVATAMÂNT, faza Nationala, Iasi, 3-4 iunie 1989

[9] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, CLASE DE SIRURI TRAIAN LALESCU, Sesiunea de Comunicari Stiintifice a Institutului de Petrol si Gaze din Ploiesti, 6-7 mai 1989, Sinaia

[10] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, CLASE DE SIRURI LALESCU, Al treilea Simpozion de Matematica si Aplicatii al Institutului Politehnic din Timisoara, 3-4 Noiembrie 1989

[11] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, CLASE SPECIALE DE SIRURI, Lucrare pentru obtinerea gradului didactic I, Universitatea Bucuresti, 1991

[12] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, OPERATORI LALESCU SI SIRURI LALESCU, R.M.G., nr. 10/1991, pag. 5-10

[13] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, PONDERAREA UNOR SIRURI, Gazeta Matematic'a, nr. 2-3/1992, pag. 46-49

[14] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, O IDENTITATE ALGEBRICA SI CONVERGENTA SIRULUI LUI TRAIAN LALESCU, Gazeta Matematica, nr. 12/1993, pag. 444-445

[15] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, DOUA PROBLEME INTERESANTE DIN VECHEA GAZETA MATEMATICA, Gazeta Matematica, seria A, nr. 3-4/1992, pag. 37-40

[16] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, ASUPRA PROBLEMEI **2042** DIN GAZETA MATEMATICA VOLUMUL XIX (**1913-1914**), Gazeta Matematica, nr. 7-8/1992, pag. 238-239

[17] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, PROBLEME VECHI, SOLUTII SI GENERALIZARI NOI, Gazeta Matematica, nr. 5/1995, pag. 199-206

[18] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, DOUA SOLUTII NOI PENTRU PROBLEMA LUI LALESCU, OCTOGON Mathematical Magazine, vol. 8/2000 (sub tipar)

[19] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, O METODA DE ABORDARE SI EXTINDERE A UNOR LIMITE DE SIRURI, OCTOGON Mathematical Magazine, vol. 8/2000 (sub tipar)

[20] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, LALESCU FUNCTIONS, Proceedings of the seventh Symposium of Mathematics and its Applications, POLITEHNICA University of Timisoara, 1997, pag. 21-26

[21] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, METODE DE ABORDARE A LIMITELOR DIN FUNCTII LALESCU, Lucrarile Conferintei Anuale a Societatii de Stiinte Matematice din România, Cluj-Napoca, 27-31 Mai 1998, pag. 357-360

[22] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, **Tena Marcel**, ASUPRA UNOR CLASE DE LIMITE DE SIRURI, R.M.G., nr. 9/1990, pag. 15-20

[23] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, **Somodi Marius**, O METODA ELEMETARA DE DETERMINARE A LIMITEI SIRULUI LUI TRAIAN LALESCU, Gazeta Matematica, nr. 3/1989, pag. 81-82

[24] **Bătineţu-Giurgiu M.D.**, **Negoi Tanase**, O METODA GENERALA PENTRU CALCULUL UNOR LIMITE, Gazeta Matenatica, nr. 3/1995, pag. 101-107

[25] **Bătineţu-Giurgiu M.D., Semenescu Augustin**, O CLASA DE SIRURI DE TIP LALESCU, Lucrarile celei de a III-a Conferinte anuale a S.S.M.R., Craiova, 26-29 Mai 1999, vol. 3, pag. 25-37

[26] **Bătineţu-Giurgiu M.D., Bencze Mihály**, ABOUT THE PONDERATION OF THE LALESCU FUNCTION, OCTOGON Mathematical Magazine, vol. 8, nr. 1, April 2000, pag. 162-168

[27] **Bătineţu-Giurgiu M.D., Semenescu Augustin**, NEW CLASSES OF LALESCU FUNCTIONS, Buletinul Stiintific al Universitatii POLITEHNICA din Timisoara, TOM 44 (58), 2, Matematica-Fizica, 1999, pag. 51-58

[28] **Bătineţu-Giurgiu M.D., Semenescu Augustin**, METHODS FOR APPROACHING WELL-BALANCED LALESCU FUNCTION, Proceedings of the eight Symposium of Mathematics and its Applications, POLITEHNICA University of Timisoara, 4-7 noiembrie 1999, pag. 64-70

[29] **Bătineţu-Giurgiu M.D., Negoi Tanase**, O METODA ELEMENTARA DE STABILIRE A CONVERGENTEI SIRULUI LUI TRAIAN LALESCU, Gazeta Matematica, nr. 2-3/1993, pag. 53-54

[30] **Bătineţu-Giurgiu M.D., Semenescu Augustin**, UNELE EXTINDERI PRIVIND FUNCTIILE SI SIRURILE LALESCU, Didactica Matematicii, vol. 15, pag. 9-14

[31] **Bătineţu-Giurgiu M.D., Semenescu Augustin**, METODE DE DETERMINARE A LIMITELOR UNOR FUNCTII SI ALE UNOR SIRURI, Didactica Matematicii, vol. 15, pag. 15-22

[32] **Bătineţu-Giurgiu M.D., Semenescu Augustin**, PROBLEMA LUI LALESCU SI RECIPROCA TEOREMEI CESARO-STOLZ, Didactica Matematicii, vol. 15, pag. 3-8

[33] **Bătineţu-Giurgiu M.D., Semenescu Augustin**, O SUTA DE ANI DE STUDIERE A SIRULUI LUI TRAIAN LALESCU, Didactica Matematicii, vol. 16 (sub tipar)

[34] **Bătineţu-Giurgiu M.D., Bencze Mihály**, O GENERALIZARE A SIRULUI BATINETU-GIURGIU, OCTOGON Mathematical Magazine, vol. 8/2000 (sub tipar)

[35] **Bătineţu-Giurgiu Maria, Bătineţu-Giurgiu M.D.**, FUNCTII LALESCU PONDERATE, Lucrarile Conferintei Anuale a Societatii de

Stiinte Matematice din Romania, Cluj-Napoca, 27-31 Mai 1988, pag. 71-74

[36] **Bătineţu-Giurgiu Maria, Bătineţu-Giurgiu M.D.**, SIRURI SI FUNCTII DE TIP LALESCU, Lucrarile Seminarului de Creativitate Matematica, Universitatea de Nord din Baia Mare, vol. 7, 1996-1997, pag.5-8

[37] **Bencze Mihály**, O GENERALIZARE A LIMITEI SIRULUI LUI TRAIAN LALESCU, Gazeta Matematica, seria A, nr. 4/1988, pag.158-159

[38] **Bencze Mihály**, A GENERALIZATION OF TRAIAN LALESCU LIMIT, OCTOGON Mathematical Magazine, vol. 7, nr.1, April 1999, pag. 164-165

[39] **Blaga Alexandru**, O GENERALIZARE A SIRULUI LUI TRAIAN LALESCU, R.M.T., anul XIX, nr. 1-2/1988, pag. 33-34

[40] **Dicu Mihai**, O MODALITATE DE ABORDARE A SIRULUI LUI TRAIAN LALESCU, R.M.T., anul XX, nr. 1-2/1989, pag. 37-38

[41] **Ianculescu Traian**, ASUPRA UNOR CLASE DE SIRURI CONVERGENTE, Revista de Matematica din Craiova (CARDINAL), anul VII, nr. 1/1996-1997, pag. 1-4

[42] **Iliescu Ilie, Ştefănică Dan, Troie Adrian**, ASUPRA UNOR CLASE SPECIALE DE SIRURI DE NUMERE REALE, R.M.G., nr. 9/1990, pag. 21-25

[43] **Negoi Tănase**, O SOLUTIE ELEMENTARA A PROBLEMEI **579** DIN (**1901-1902**), Gazeta Matematica, nr. 7/1994, pag. 310

[44] **Popoviciu Tiberiu**, ASUPRA CALCULULUI UNEI LIMITE, Gazeta Matematica, seria A, nr. 1/1971, pag. 8-11

[45] **Tóth László, Bencze Mihály**, THE ASYMPTOTIC EXPANSION OF TRAIAN LALESCUS SERIES, OCTOGON Mathematical Magazine, vol.4, nr. 1, April 1996, pag. 12-17

[46] **Ţena Marcel**, O ALTA SOLUTIE A PROBLEMEI **579** (**G.M.**), revista **LICĂRIRI** a Liceului NICOLAE BALCESCU din Craiova, 1978, pag. 13-14

HUNDRED YEARS OF THE LALESCU SEQUENCE

Abstract. In this paper a new generalization for sequences of *Lalescu* type is presented. Also an ample bibliography concerning *Lalescu* sequence as well as the extensions or generalizations of this sequence are given.

Primit: 18.10.2000

D.M. Bătinețu-Giurgiu
Colegiul Național Matei Basarab
Str. Matei Basarab 32,
București

Augustin Semenescu
Universitatea Politehnică București
Splaiul Independeței 313
Sector 6, cod 77206