Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 9(1999 - 2000), 37 - 46

# UTILIZAREA FUNCŢIEI INVERSE ÎN REZOLVAREA UNOR PROBLEME DE MATEMATICI ELEMENTARE

**Dan BĂRBOSU**

## 1. INTRODUCERE

Prezenta lucrare are un caracter metodic. Se adresează elevilor de liceu şi profesorilor acestora, urmărind să le ofere metode unitare de rezolvare a unor probleme ce au constituit (sau pot constitui) subiecte ale unor concursuri de matematică. Caracteristic pentru toate problemele ce urmează a fi discutate este faptul că ele exploatează proprietăţile inverselor unor funcţii auxiliare, a căror considerare rezultă natural din conţinutul problemei.

Menţionăm că o primă variantă a acestei lucrări a fost prezentată cu prilejul aniversării a 38 de ani de existenţă a Colegiului Naţional "Vasile Lucaciu" din Baia Mare, în ianuarie 2000.

## 2. UTILIZAREA FUNCȚIEI INVERSE ÎN REZOLVAREA UNOR INECUAȚII FUNCȚIONALE

Se va stabili un rezultat simplu, dar eficient în rezolvarea unor probleme aparent dificile. El este conținut în:

**Lema 2.1.** Dacă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este strict crescătoare și bijectivă, atunci unica funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisface inegalitățile:

(2.1) $$f[g(x)] \le x \le g[f(x)],\ (\forall)x \in \mathbb{R},$$

este funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

(2.2) $$f(x) = g^{-1}(x),\ (\forall)x \in \mathbb{R}.$$

**Demonstrație.** Din ipoteza că $g$ este strict crescătoare și bijectivă rezultă că $g$ este inversabilă, strict crescătoare. Inegalitatea stângă (2.1) conduce la

(2.3) $$f(x) \le g^{-1}(x),\ (\forall)x \in \mathbb{R}$$

iar inegalitatea dreaptă (2.2) conduce la

(2.4) $$g^{-1}(x) \le f(x),\ (\forall)x \in \mathbb{R}.$$

Din (2.3) și (2.4) se obține $f(x) \le g^{-1}(x)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.

**Observația 2.1.** (i) În situația că $g$ este strict descrescătoare există o infinitate de funcții $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ce satisfac (2.1), formată din toate funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ce au proprietatea

(2.5) $$f(x) \le g^{-1}(x),\ (\forall)x \in \mathbb{R},$$

după cum cititorul se poate convinge ușor.

(ii) Rezultatul lemei 2.1 se păstrează şi dacă $f : I \to I$, $g:J \to I$, unde $I, J \subseteq \mathbb{R}$, $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$ iar $g$ este bijectivă şi strict crescătoare.

Se vor prezenta în continuare unele aplicaţii ale lemei 2.1.

**Aplicaţia 2.1. [problema 64, pag.15, [1]].** Să se determine funcţiile $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ pentru care:

$$f(x^2+x) \leq x \leq f^2(x) + f(x), (\forall) x \in [0,+\infty).$$

**Soluţie.** Funcţia $g$ : $[0,+\infty) \to [0,+\infty)$, $g(x) = x^2 + x$ este bijectivă şi strict crescătoare pe $[0,+\infty)$. Inegalităţile enunţului sunt inegalităţile 2.1, rezultă că

$$f(x) = g^{-1}(x) = \frac{\sqrt{4x+1}-1}{2}, (\forall) x \in [0,+\infty).$$

**Aplicaţia 2.2.** Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$f(x^3+1) \leq x \leq f^3(x) + 1. (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

**Soluţie.** Funcţia $g$ : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x)=x^3 + 1$ este bijectivă şi strict crescătoare. În baza lemei (2.1), unica funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ce satisface condiţiile enunţului este $f(x) = g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

**Aplicaţia 2.3.** Să se determine funcţiile $f$ : $(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$f(2x-1) \leq x \leq 2^{f(x)} - 1, (\forall) x \in (-1,+\infty).$$

**Soluţie.** Funcţia $g$ : $(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2^x - 1$ este bijectivă şi strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Aplicând lema 2.1, se obţine $f(x) = g^{-1}(x) = \log_2(x+1)$.

În finalul acestei secțiuni, menționăm că cititorul poate găsi alte aplicații ale lemei 2.1 în problemele propuse de profesorul G.Szöllösy și de autorul acestui articol în [5], [6].

## 3. UTILIZAREA FUNCȚIEI INVERSE ÎN STUDIUL EXISTENȚEI, UNICITĂȚII ȘI CONTINUITĂȚII UNOR FUNCȚII DEFINITE IMPLICIT

Se stabilește mai întâi rezultatul auxiliar conținut în

**Lema 3.1.** Fie $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții cu proprietățile:

(i) $g$ continuă și bijectivă;

(ii) $h$ continuă

În aceste condiții există o singură funcție continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care satisface ecuația funcțională:

(3.1) $$g[f(x)]=h(x),\ (\forall)x\in\mathbb{R}.$$

Această funcție este exprimată prin egalitatea

(3.2) $$f(x)=g^{-1}[h(x)],\ x\in\mathbb{R}.$$

**Demonstrație.** Din faptul că $g$ este bijectivă rezultă că ecuația funcțională (3.1) are soluție unică, exprimată prin (3.2). Continuitatea ei rezultă din continuitatea lui $g^{-1}$ și a lui $h$.

**Aplicația 3.1. [4]** Arătați că există o singură funcție continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea

$$f^5(x)+f(x)-x=0,\ (\forall)x\in\mathbb{R}.$$

**Soluție.** Dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^5+x$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=x$, ecuația fundamentală a enunțului este ecuația (3.1) cu $g$ și $h$ anterior precizate.

Evident $g$ este continuă pe $\mathbb{R}$. Cum $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, în baza continuității lui $g$ rezultă că $g$ este surjectivă. Cum $g'(x) = 5x^4 + 1 > 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$, $g$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci injectivă. Prin urmare $g$ este bijectivă. Deoarece $h : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x) = x$ este continuă pe $\mathbb{R}$, aplicând teorema 3.1 se obține afirmația enunțului.

**Aplicația 3. 2.** Fie $n \in \mathbb{N}$. Arătați că există o singură funcție $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea

$$f^{2n+1}(x) + f(x) - \ln(x^2+1) = 0,\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}.$$

**Soluție.** Dacă $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x^{2n+1} + x$, $h : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x) = \ln(x^2+1)$, g este continuă și bijectivă iar h este continuă pe $\mathbb{R}$. Aplicând lema 3.1, există o singură funcție $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care satisface condițiile enunțului, ea fiind exprimată prin egalitatea $f(x) = g^{-1}[\ln(x^2+1)]$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

Particularizând convenabil funcțiile $g$ și $h$, cititorul poate obține alte exemple interesante.

## 4. UTILIZAREA FUNCȚIEI INVERSE ÎN STUDIUL CONVERGENȚEI UNOR ȘIRURI

Prezentăm aici un rezultat ce ne-a fost comunicat de către lector univ.dr. Cristinel Mortici de la Universitatea din Târgoviște.

**Lema 4.1.** Fie $f, g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ iar $(a_n)_{n\geq1}$, $(b_n)_{n\geq1}$ două șiruri de numere reale ce satisfac relația:

(4.1) $$f(a_n) = g(b_n),\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă:

(i) $f$ este continuă şi bijectivă;

(ii) $g$ este continuă;

(iii) şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, atunci $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi are loc:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = f^{-1}[g(b)]. \tag{4.2}$$

**Demonstraţie.** Deoarece $f$ este bijectivă, din (4.1) rezultă că $a_n = f^{-1}[g(b_n)], (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$. Din ipotezele (i) şi (ii), $f^{\cdot}$ şi $g$ sunt continue şi atunci $f^{-1} \circ g$ este continuă. Mai departe, utilizând ipoteza (iii) rezultă că şirul $\left(f^{-1}[g(b_n)]\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent şi $\lim_{n\to\infty} f^{-1}[g(b_n)] = f^{-1}[g(b)]$, egalitate echivalentă cu (4.2).

**Observaţia 4.1.** În condiţiile enunţului, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu proprietăţile (4.1) şi (4.2) este unic determinat.

**Aplicaţia 4.1. [problema 56, pag. 33, [1]].** Arătaţi că există un singur şir de numere reale strict pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$ care satisfac relaţia:

$$a_n + \ln a_n = 1 + \frac{1}{n},\ (\forall)\, x \in \mathbb{N}^*.$$

Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi calculaţi $\lim_{n\to\infty} a_n$.

**Soluţie.** Dacă $f : (0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$, $g : (0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $g(x)=x$, $b_n = 1 + \frac{1}{n}$, relaţia enunţului se scrie în forma:

$$f(a_n) = g(b_n),\ (\forall)\, x \in \mathbb{N}^*.$$

Este evident că $f$ este continuă pe $(0,+\infty)$. Cum $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ rezultă că $f$ este surjectivă. Deoarece $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$, $(\forall)$ $x \in (0,+\infty)$, funcţia $f$ este strict crescătoare. Rezultă că $f$ este bijectivă. În baza lemei 4.1 şi a observaţiei 4.1, există un singur şir $(a_n)_{n\geq 1}$ care satisface relaţia enunţului. Cum $g$ este continuă iar $(b_n)_{n\geq 1}$ convergent cu $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$, aplicând din nou lema 4.1 se obţine că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f^{-1}\left[g\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = f^{-1}(1) = 1.$$

Alte aplicaţii ale lemei 4.1 au fost publicate de autorul articolului în [6].

Particularizând convenabil funcţiile $f$ şi $g$, cititorul poate obţine alte aplicaţii interesante.

## 5. UTILIZAREA FUNCŢIEI INVERSE ÎN OBŢINEREA UNEI INEGALITĂŢI INTEGRALE

Rezultatul principal al acestei secţiuni este conţinut în

**Lema 5.1.** Fie $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$ iar $f : [a,b] \to [c,d]$, $g : [c,d] \to \mathbb{R}$, h : $[a,b] \to \mathbb{R}$ continue pe intervalele de definiţie, astfel încât

(5.1) $$g[f(x)] \geq h(x), (\forall) x \in [a,b].$$

Sunt adevărate afirmaţiile de mai jos:

(i) dacă $g$ este strict crescătoare şi $g([c,d]) = \mathbb{R}$, are loc inegalitatea

(5.2) $$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g^{-1}[h(x)]dx;$$

(ii) dacă $g$ este strict descrescătoare şi $g([c,d]) = \mathbb{R}$, are loc inegalitatea:

(5.3) $$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g^{-1}[h(x)]dx$$

**Demonstraţie.**(i) Cum $g$ este continuă, $g([c,d]) = \mathbb{R}$ şi $g$ este strict crescătoare, rezultă că $g$ este bijectivă. Din (5.1) şi faptul că $g^{-1}: \mathbb{R}\to[c,d]$ este strict crescătoare, rezultă inegalitatea

(5.4) $$f(x) \geq g^{-1}[h(x)], (\forall)x \in [a,b],$$

iar de aici, prin integrare între limitele $a$ şi $b$ se obţine (5.2).

(ii) Raţionând ca la (i) se obţine inegalitatea contrară lui (5.4) iar apoi se integrează inegalitatea obţinută între limitele $a$ şi $b$.

**Aplicaţia 5.1.(problema 89, pag. 40, din [1]).** Fie $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie care verifică relaţia:

$$f^3(x) + f(x) \geq x, \ (\forall)\, x \in \mathbb{R}.$$

Arătaţi că $\int_0^2 f(x)dx \geq \frac{5}{4}$.

**Soluţie.** Dacă $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3 + x$, inegalitatea enunţului se scrie în forma:

$$g[f(x)] \geq x, (\forall)x \in \mathbb{R}.$$

Cum $g$ este continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ şi $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, rezultă că funcţia $g$ este bijectivă şi strict crescătoare. Dacă $g^{-1}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este inversa lui $g$, din ipoteză se obţine că $f(x) \geq g^{-1}(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$. Integrând membru cu membru între limitele 0 şi 2, se obţine

(5.5) $$\int_0^2 f(x)\,dx \geq \int_0^2 g^{-1}(x)\,dx.$$

Fie $I = \int_0^2 g^{-1}(x)\,dx$. Cu schimbarea de variabilă

$$t = g^{-1}(x) \Rightarrow x = g(t),\ dx = g'(t)dt$$

Prin urmare

$$I = \int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(2)} t\, g'(t)\,dt = \int_0^1 t(3t^2+1)\,dt = 3\int_0^1 t^3\,dt + \int_0^1 t\,dt = \frac{5}{4}.$$

Ţinând seama de (5.5), se obţine $\int_0^2 f(x)\,dx \geq \frac{5}{4}$.

În încheiere, invit cititorii să găsească şi alte aplicaţii ale lemei 5.1.

**Bibliografie**

1. **Mortici, C.,** Probleme pregătitoare pentru concursurile de matematică, Editura GIL, Zalău, 1999
2. **Năstăsescu, C., Niţă, C., Rizescu, Gh.,** Matematică, Algebră, Manual pentru clasa a IX-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1982
3. **Nicolau, M., Dinculeanu, N., Marcus, S.,** Analiză matematică, vol.I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971
4. *** , Problemă dată la concursul de matematică, etapa judeţeană, 1994, Giurgiu, (enunţ parţial)
5. *** , Colecţia "Matlap" 1999 (în limba maghiară)
6. *** , Colecţia "Matlap" 2000 (în limba maghiară)

**SOLVING ELEMENTARY PROBLEMS BY USING THE INVERSE FUNCTION**

**Abstract**.The paper has a methodical character. There is presented a set of problems which have the common property that their solutions use essentialy the properties of an auxilliary function, natural introduced from the context of the problem. The main results of the paper are the lemmas 2.1, 3.1, 4.1 and 5.1.

Primit 20.10.2000

Universitatea de Nord Baia Mare

Facultatea de Ştiinţe

Catedra de Matematică şi Informatică

Victoriei 76, 4800 Baia Mare, ROMANIA

E-mail: dbarbosu@univer.ubm.ro