Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 9(1999 - 2000), 47 - 50

REZOLVAREA UNEI PROBLEME DE GEOMETRIE UTILIZÂND CALCULUL INTEGRAL

Dan BĂRBOSU

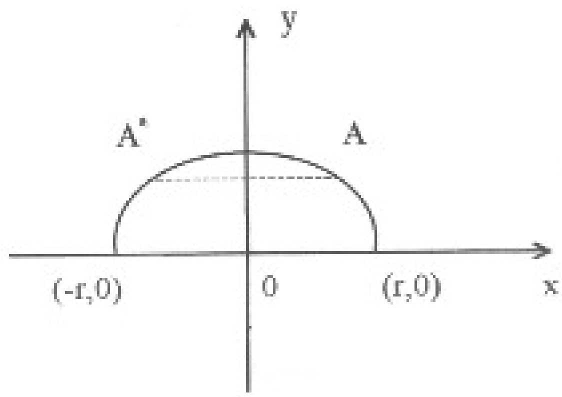
În manualul [1] la pagina 139 există problema 59*, cu următorul enunţ:

"O mărgea se obţine dintr-un corp sferic prin perforare cu un burghiu al cărui ax trece prin centrul sferei. Să se afle volumul mărgelei, ştiind că gaura obţinută are lungimea *h*"

Soluţia cea mai vehiculată a problemei face apel la principiul lui Cavalieri (vezi [1], pag.130-132).

Se va prezenta aici o soluţie ce utilizează calculul integral, care este accesibilă elevilor din clasa a XII-a.

Fie r ($r > 0$) raza corpului sferic din care provine mărgeaua. Se consideră semicercul cu centrul în origine şi raza r situat în semiplanul pozitiv, a se vedea următoarea figură:



Ecuaţia cercului este:

(1) $$x^2 + y^2 = r^2$$

Se intersectează semicercul cu un segment de lungime h, paralel cu axa Ox, obţinându-se punctele:

$$A'\left(-\frac{h}{2}, \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}\right), A\left(\frac{h}{2}, \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}\right).$$

Este clar atunci că volumul mărgelei se obţine scăzând din volumul corpului obţinut prin rotirea arcului AA' în jurul axei Ox volumul cilindrului de înălţime AA', adică

(2) $$V_{margea} = V_1 - V_2$$

unde prin V_1, V_2 s-au notat primul şi respectiv al doilea volum.

Se vor calcula în continuare aceste volume.

Din (1) se obţine ecuaţia $y = f(x)$ a arcului AA', unde:

(3) $$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right].$$

Atunci:

$$V_1 = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f^2(x)dx = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (r^2 - x^2)dx =$$

$$= 2\pi \int_{0}^{\frac{h}{2}} (r^2 - x^2)dx = 2\pi \left[r^2 x \Big|_0^{\frac{h}{2}} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{h}{2}} \right]$$

$$= \pi\, r^2 h - 2\pi \cdot \frac{h^3}{24} = \pi\, r^2 h - \frac{\pi\, h^3}{12}.$$

Cum raza bazei cilindrului este $r_1 = \sqrt{r^2 - \dfrac{h^2}{4}}$ iar înălţimea h, volumul acestuia este exprimat prin:

$$V_2 = \pi\, r_1^2 h = \pi \left(r^2 - \frac{h^2}{4} \right) h = \pi\, r^2 h - \frac{\pi\, h^3}{4}.$$

Prin urmare , volumul mărgelei admite exprimarea:

$$V_{m\breve{a}rgea} = V_1 - V_2 = \frac{\pi \cdot h^3}{4} - \frac{\pi \cdot h^3}{12} = \frac{\pi \cdot h^3}{6}.$$

Bibliografie

1. **Coţa, A., Rado, M., Răduţiu, M., Vornicescu, F.,** Matematică. Geometrie., Manual pentru clasa a X-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989

SOLVING A PROBLEM OF GEOMETRY USING INTEGRAL CALCULUS

Abstract. A solution to a problem of geometry using integral calculus is presented.

Primit 20.10.2000

Universitatea de Nord Baia Mare
Facultatea de Ştiinţe
Catedra de Matematică şi Informatică
Victoriei 76, 4800 Baia Mare, ROMANIA
E-mail: dbarbosu@univer.ubm.ro