Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 9(1999 - 2000), 51 - 58

DESPRE PROPRIETATEA PUNCTULUI INTERMEDIAR ÎN TEOREMELE DE MEDIE PENTRU INTEGRALA RIEMANN

Vasile BERINDE

În lucrarea [1], B. Jacobson a demonstrat că punctul intermediar din formula de medie pentru integrala Riemann, adică punctul $c \in [a, b]$ pentru care are loc egalitatea(f continuă pe $[a, b]$)

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt,$$

are proprietatea că

$$\lim_{b \searrow a} \frac{c-a}{b-a} = \frac{1}{2}.$$

Emil C. Popa, în [2], a extins acest rezultat şi pentru alte formule de medie (prima şi a doua teoremă de medie pentru integrala Riemann, teoremele de medie ale lui Cauchy şi Lagrange etc.)

Scopul acestei note este să arătăm că rezultatele din [2] pot fi întărite, considerând condiţii mai slabe asupra funcţiilor implicate.

Demonstrăm mai întâi o variantă a primei teoreme de medie pentru integrala Riemann (Teorema 9.2.10, pag. 330 din [3]).

Teorema 1. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcţii integrabile cu proprietatea că*

(i) f are proprietatea lui Darboux;

(ii) $g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$.

Atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt. \tag{1}$$

Demonstraţie. Fie $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x), M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ (fiind integrabilă, f este mărginită). Atunci

$$m \leq f(t) \leq M, \qquad \forall t \in [a,b]$$

şi deci, folosind (ii), avem

$$mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t), \qquad \forall t \in [a,b].$$

Folosim faptul că produsul a două funcţii integrabile este o funcţie integrabilă şi obţinem, pe baza monotoniei integralei Riemann, că

$$m\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq M\int_a^b g(t)dt$$

Deosebim cazurile : a) $\int_a^b g(t)dt = 0$; b) $\int_a^b g(t)dt > 0$.

În cazul a) rezultă $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$ şi atunci egalitatea (1) are loc pentru orice punct $c \in [a,b]$ iar în cazul b) obţinem că

$$\gamma = \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \in [m,M]$$

şi cum f are proprietatea lui Darboux, deducem că există $c \in [a,b]$ a.î. $\gamma = f(c)$, adică astfel încât

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt.$$

Observaţie. Pentru $g \equiv 1$ din Teorema 1 obţinem o extindere a formulei de medie pentru integrala Riemann (în ipoteza mai slabă că f este integrabilă şi are proprietatea lui Darboux).

Corolar 1. *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă şi admite primitive atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

Demonstraţie. Orice funcţie care admite primitive are proprietatea lui Darboux. Concluzia rezultă din Teorema 1, luând $g \equiv 1$.

Observaţie. Numărul $\mu[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$ se numeşte *medie integrală* a funcţiei f pe $[a, b]$. Formula de medie exprimă faptul că în condiţii corespunzătoare, $\exists\, c \in [a, b]$, astfel încât $\mu[f] = f(c)$.

Teorema 2. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcţii care îndeplinesc condiţiile*
(i) f şi g sunt integrabile iar f admite primitive pe $[a, b]$;
(ii) f şi g sunt continue într-o vecinătate a punctului a;
(iii) f este derivabilă în a, g este nenegativă şi

$$f'(a)g(a) \neq 0.$$

Atunci, fiind dat $x \in (a, b]$, numărul $c_x \in [a, x]$ pentru care

$$\int_a^x f(t)g(t)dt = f(c_x) \cdot \int_a^x g(t)dt \tag{2}$$

are proprietatea că

$$\lim_{x \searrow a} \frac{c_x - a}{x - a} = \frac{1}{2} \tag{3}$$

Demonstraţie. Aplicând Teorema 1, rezultă că există $c_x \in [a, x]$ pentru care (2) are loc. Să demonstrăm că (3) este adevărată.

Fie $F, H : [a, b] \to \mathbb{R}$ date prin

$$F(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt-f(a)\int_a^x g(t)dt,\ H(x)=(x-a)^2,\ x\in[a,b]$$

Din (i) rezultă că F este bine definită iar din (ii) rezultă că F este derivabilă într-o vecinătate $V_\varepsilon=[a,\varepsilon)$ a lui a. De asemenea, avem $H^{'}(x)\neq 0$, pentru orice $x\in(a,b]$. Prin urmare, pentru $x\in V_\varepsilon$ avem

$$\lim_{x\searrow a}\frac{F'(x)}{H'(x)}=\lim_{x\searrow a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)}{2(x-a)}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\searrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(x),$$

şi cum f este derivabilă în a iar g este continuă în a, deducem că

$$\lim_{x\searrow a}\frac{F^{'}(x)}{H'(x)}=\frac{1}{2}f'(a)g(a).$$

Din teorema lui L'Hôpital rezultă atunci că

$$\lim_{x\searrow a}\frac{F(x)}{H(x)}=\frac{1}{2}f'(a)g(a). \tag{4}$$

Pe de altă parte, din (2) rezultă că

$$\frac{F(x)}{H(x)}=\frac{f(c_x)-f(a)}{c_x-a}\cdot\frac{c_x-a}{x-a}\cdot\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x g(t)dt\right), \tag{5}$$

şi cum $c_x\searrow a$, când $x\searrow a$, deducem că

$$\lim_{x\searrow a}\frac{f(c_x)-f(a)}{c_x-a}=f^{'}(a).$$

Dar g este continuă pe V_ε deci admite primitive pe V_ε. Fie G o primitivă a sa. Atunci, pentru orice $x\in V_\varepsilon$ avem

$$\int_a^x g(t)dt=G(x)-G(a)$$

şi deci

$$\lim_{x\searrow a}\frac{1}{x-a}\int_a^x g(t)dt = \lim_{x\searrow a}\frac{G(x)-G(a)}{x-a} = G^{'}(a) = g(a) \qquad (6)$$

Din relaţiile (4), (5) şi (6) rezultă că $\lim\limits_{x\searrow a}\frac{c_x-a}{x-a}$ există (fie aceasta l) şi avem

$$\frac{1}{2}f^{'}(a)g(a) = f^{'}(a)g(a)\cdot l,$$

care, datorită faptului că $f^{'}(a)g(a)\neq 0$, ne dă tocmai

$$l=\frac{1}{2},$$

ceea ce încheie demonstraţia.

Corolarul 2. (E.C. Popa, [2], Teorema 1). *Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, funcţii continue cu f derivabilă în a, g nenegativă şi $f^{'}(a)g(a)\neq 0$; din prima formulă de medie pentru integrala Riemann avem: oricare ar fi $x\in(a,b]$, există $c_x\in[a,x]$ astfel ca*

$$\int_a^x f(t)g(t)dt = f(c_x)\int_a^x g(t)dt.$$

Atunci

$$\lim_{x\searrow a}\frac{c_x-a}{x-a}=\frac{1}{2}.$$

Următorul rezultat este cunoscut ca "a doua teoremă de medie" pentru integrala Riemann sau teorema Bonnet-Weierstrass (vezi [3], Teorema 9.2.12, pag. 331-332).

Teorema 3. *Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcţii integrabile cu g monotonă. Atunci există $c\in[a,b]$ astfel încât*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a)\int_a^c f(t)dt + g(b)\int_c^b g(t)dt.$$

Demonstraţia acestui rezultat poate fi găsită în [3].

Cu ajutorul acestuia putem demonstra

Teorema 4. *Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcţii care îndeplinesc condiţiile*

(i) f şi g sunt integrabile pe $[a,b]$;

(ii) f este continuă şi g este derivabilă într-o vecinătate a lui a şi $f(a)g'(a) \neq 0$;

(iii) g este monotonă.

Atunci, pentru orice $x \in (a,b]$, există $c_x \in [a,x]$ astfel încât

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a)\int_a^{c_x} f(t)dt + g(x)\int_{c_x}^x f(t)dt$$

şi

$$\lim_{x \searrow a} \frac{c_x - a}{x - a} = \frac{1}{2}.$$

Demonstraţie. Prima parte a concluziei rezultă din Teorema 3.

Fie $F, H : [a,b] \to \mathbb{R}$ două funcţii definite astfel

$$F(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt - g(a)\int_a^x f(t)dt, \ H(x) = (x-a)^2, \ x \in [a,b].$$

Deoarece F este derivabilă într-o vecinătate $V_\varepsilon = [a, \varepsilon)$ a lui a, iar $H'(x) \neq 0$, pentru orice $x \neq a$, avem, folosind teorema de derivare a integralei Riemann, că

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow a} \frac{F'(x)}{H'(x)} &= \lim_{x \searrow a} \frac{f(x)g(x) - g'(x)\int_a^x f(t)dt - g(x)f(x)}{2(x-a)} = \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x \searrow a} g'(x) \cdot \frac{\int_a^x f(t)dt}{x-a} = -\frac{1}{2}g'(a) \cdot f(a) \end{aligned}$$

şi, conform teoremei lui l'Hôpital, deducem că

$$\lim_{x \searrow a} \frac{F(x)}{H(x)} = -\frac{1}{2}g'(a) \cdot f(a). \tag{7}$$

Pe de altă parte

$$\frac{F(x)}{H(x)} = \frac{g(a)\int_a^{c_x} f(t)dt + g(x)\int_{c_x}^x f(t)dt - g(x)\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2} =$$

$$= \frac{g(a)\int_a^{c_x} f(t)dt - g(x)\int_a^{c_x} f(t)dt}{(x-a)^2} = -\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \cdot \frac{\int_a^{c_x} f(t)dt}{c_x - a} \cdot \frac{c_x - a}{x-a}$$

şi deci, pentru orice $x \in V_\varepsilon$,

$$\lim_{x \searrow a} \frac{F(x)}{H(x)} = -g^{'}(a) \cdot f(a) \cdot \lim_{x \searrow a} \frac{c_x - a}{x-a}, \tag{8}$$

căci

$$\lim_{x \searrow a} \frac{1}{c_x - a} \int_a^{c_x} f(t)dt = f(a).$$

Din (7) şi (8), în baza condiţiei $f(a)g^{'}(a) \neq 0$, rezultă tocmai concluzia teoremei.

Corolarul 3.(E.C.Popa, [2], Teorema 2). *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continuă, g monotonă şi derivabilă cu $f(a)g^{'}(a) \neq 0$. Din a doua formulă de medie pentru integrala Riemann, avem: oricare ar fi $x \in (a, b]$, există $c_x \in [a, x]$ astfel încât*

$$\int_a^x f(t)g(t)dt = g(a)\int_a^{c_x} f(t)dt + g(x)\int_{c_x}^x f(t)dt$$

Atunci

$$\lim_{x \searrow a} \frac{c_x - a}{x - a} = \frac{1}{2}.$$

Observaţie. Teoremele 3 şi 4 din [2] dau rezultate analoage celor din Corolarul 2 şi 3 din această lucrare, dar pentru teoremele lui Cauchy, Lagrange şi formula lui Taylor. Având în vedere faptul că există numeroase extinderi ale teoremelor lui Cauchy şi Lagrange, sugerăm cititorului să obţină şi pentru aceste teoreme de medie, rezultate analoage celor date în [2] şi în lucrarea de faţă.

Bibliografie

1. **Jacobson, B.,** On the mean value theorem for integrals, The American Mathematical Monthly, Vol.89 (1982), 300-301

2. **Popa, E.C.,** O proprietate a punctului intermediar în unele teoreme de medie, Astra Matematică, 1 (1990), nr.4, 3-7

3. **Sirețchi, Gh.,** Calcul diferențial și integral, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985, vol.1

ON THE PROPERTY OF INTERMEDIATE POINT IN THE MEAN VALUE THEOREMS FOR INTEGRALS

Abstract. The main aim of this note is to show that the property of intermediate point in the mean value theorems for integrals proved in [2] remains valid under weaker assumptions on the functions involved. So, Theorem 2 and Theorem 4 in our paper are extensions of the Theorem 1 and 2 in [2], respectively. Some variants of the mean value theorems for integrals are also given.

Primit: 19.10.2000

Universitatea de Nord Baia Mare
Facultatea de Științe
Catedra de Matematică și Informatică
Victoriei 76, 4800 Baia Mare
ROMANIA
E-mail: vberinde@univer.ubm.ro