Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 9(1999 - 2000), 59 - 68

MODEL MATEMATIC PENTRU DETERMINAREA GRADIENTULUI TERMIC ÎN PELICULA DE LUBRIFIANT

Cristian FEDORCIUC-ONIŞA

Problema determinării gradientului termic în pelicula de lubrifiant a fost larg abordată în ultimul deceniu, pentru obţinerea unui plus de informaţii privind condiţiile de ungere din cuplele tribologice. Ecuaţia energiei, ale cărei soluţii reprezintă temperatura instantanee ("fulger") din filmul de lubrifiant se rezolvă împreună cu ecuaţiile de variaţie ale vâscozităţii şi ale densităţii, rezultând un sistem de ecuaţii înalt neliniar.

În prezenta lucrare prezentăm un model matematic de determinare a gradientului termic în pelicula de lubrifiant pentru obţinerea unui plus de informaţii privind condiţiile de ungere din cuplele tribologice. Vom folosi următoarele notaţii:

α_T	=coeficientul de dilatare termică a lubrifiantului, K^{-1},
ρ	=densitatea lubrifiantului, kg/m^3,
η	=vâscozitatea dinamică a lubrifiantului, $Pa\cdot s$,
c_p	=căldura specifică a lubrifiantului, $J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}$,
F_1, F_2, F_3 =	Funcţii Dowson,
k_2	=conductivitatea termică a lubrifiantului, $W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}$,
p	=presiunea , *Pa*,
r, θ, z	=coordonate cilindrice, *mm*,
T	=temperatura în filmul de lubrifiant, ^0K,
v_r, v_θ, v_z	=vitezele lubrifiantului, *mm/s*,
V_r, V_θ, V_z	=vitezele relative ale suprafeţelor, *mm/s*,
$\Delta r, \Delta\theta, \Delta z$	=valori de incrementare ale reţelei de discretizare, *mm,rad,mm*
α_1	=coeficient de variaţie a densităţii cu presiunea, Pa^{-1}.
α	=exponentul presiunii din relaţia de variaţie a vâscozităţii, K^{-1},
β	=exponentul temperaturii din relaţia de variaţie a vâscozităţii, K^{-1},
β_1	=coeficient de variaţie a densităţii cu presiunea, Pa^{-1}.
h_{min}	=grosimea minimă a filmului de lubrifiant
i,j,k	=notaţiile gridului reţelei,
d	=deformaţia elastcică a suprafeţelor în contact, *mm*
E	=modul de elasticitate longitudinal, *Pa*.

INTRODUCERE

Rezolvarea ecuației energiei din teoria ungerii termoelastohidrodinamice (TEHD) se face împreună cu ecuațiile de variație ale vâscozității și ale densității, rezultând un sistem înalt neliniar. Metodele de rezolvare cunoscute și care au condus la rezultate viabile sunt: metoda multigrid – multilevel, implementată relativ recent de Lubrecht [3], metoda iterativă bazată pe combinația tehnicilor Newton – Raphson și Gauss-Seidel, metoda care le combină pe cele de mai sus, precum și metoda diferențelor finite.

ECUAȚIA ENERGIEI

Ungerea termoelastohidrodinamică a cuplelor tribologice are la bază următoarele ecuații [6]: ecuația lui Reynolds (1), ecuația energiei (2), ecuația transferului termic (ecuația lui Laplace) (3) și ecuațiile de variație ale vâscozității și densității (4).

Pentru rezolvarea acestui sistem înalt neliniar se procedează la discretizarea domeniului fluid, discretizare care se poate face în mai multe moduri. Dacă ecuația lui Reynolds, care dă gradientul de presiune în pelicula de lubrifiant, se rezolvă pe un domeniu plan de discretizare, în schimb, ecuația energiei se rezolvă pe un domeniu de discretizare spațial.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(F_2\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{F_2}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(F_2\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)=V_r\frac{\partial p}{\partial r}\frac{F_3}{F_0}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{F_3}{F_0}\right)-\rho V_z$$

$$\begin{aligned}&\rho c_p\left(v_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)-k_0\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)=\\&=\alpha_T T\left(v_r\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+\eta\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)^2\right]\end{aligned}\qquad(2)$$

$$\frac{\partial^2 T_m}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_m}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_m}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 T_m}{\partial z^2}=0\qquad(3)$$

$$\eta=\eta_0 e^{\alpha p-\beta(T-T_0)}$$

$$\rho=\rho_0\left(1+\frac{\alpha_1 p}{1+\beta_1 p}\right)\qquad(4)$$

Rezolvarea ecuației energiei este doar o etapă în aplicarea teoriei ungerii TEHD, însă este etapa care necesită cel mai mult timp de calcul. Algoritmul de calcul din teoria ungerii TEHD cuprinde, în general, următoarele etape:

1. Rezolvarea ecuației lui Reynolds, în condiții izoterme, pornind de la presiunea hertziană maximă, ca valoare inițială.
2. Rezolvarea ecuației energiei cu valorile presiunii obținute anterior, cu soluțiile luate la atingerea primului criteriu de convergență.
3. Rezolvarea ecuației energiei cu valorile presiunii obținute prin considerarea soluțiilor de la punctul 2, cu soluțiile luate la atingerea celui de al doilea criteriu de convergență.
4. Rezolvarea ecuației lui Reynolds, cu valorile temperaturii obținute la punctul 3 și obținerea gradientului de presiune.

CONDIȚIILE LA LIMITĂ ALE ECUAȚIEI ENERGIEI

Condițiile la limită ale ecuației energiei presupun continuitatea fluxului termic în filmul de lubrifiant (C1) și transferul termic numai prin convecție la contactul dintre fluid și suprafețele metalice ale cuplei tribologice (C2):

$$T(r,\theta,z)_{0,j,k} = T(r,\theta,z)_{I,j,k} = T(r,\theta,z)_{i,0,k} = T(r,\theta,z)_{i,J,0} \qquad \text{(C1)}$$

$$k_0\left(\frac{\partial T}{\partial z_k}\right)_{z=0} = k_a\left(\frac{\partial T_1}{\partial z_k}\right)_{z=0}$$

$$k_0\left(\frac{\partial T}{\partial z_k}\right)_{z=h} = k_a\left(\frac{\partial T_2}{\partial z_k}\right)_{z=h} \qquad \text{(C2)}$$

DISCRETIZAREA ECUAȚIEI ENERGIEI

Presupunând ca gradientul de presiune în pelicula de lubrifiant a fost stabilit anterior, se poate trece la rezolvarea ecuației energiei, împreună cu ecuațiile de variație ale vâscozității și densității. Mediul de lucru folosit la dezvoltarea algoritmului de calcul a fost MathCAD2000, asamblarea fișierelor de date și de aplicații s-a făcut în MathConnex 2000. Abordarea ecuației energiei s-a făcut prin dividerea acesteia în două nivele, ceea ce a permis obținerea a două valori maxime în lungul grosimii filmului de lubrifiant: una pentru planul r_i, θ_j la nivelul I al primei treimi din grosimea h a filmului de lubrifiant şi cea de a doua, la nivelul II al celei de a doua treime din grosimea h. Rezultă astfel, practic două ecuații ale energiei aplicate pentru două plane r_i, θ_j paralele. În felul acesta se reduce numărul de variabile de la trei la două.

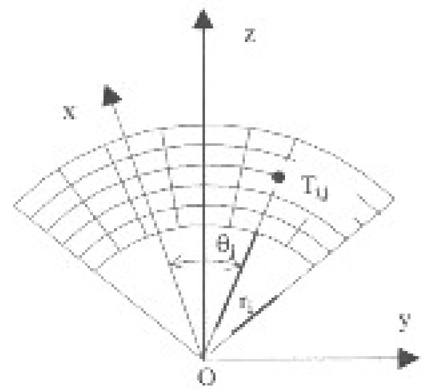

Fig.1
Gridul rețelei de discretizare

Derivatele de ordinul întâi şi doi din ecuația energiei se aproximează prin diferențe finite centrate, atfel:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{2_{j,k}} - T_{0_{j,k}}}{2\Delta r}, \; \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{T_{2_{j+1,k}} - T_{0_{j-1,k}}}{2\Delta \theta}, \; \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T_{2_{j,k+1}} - T_{0_{j,k-1}}}{2\Delta z} \tag{5}$$

pentru nivelul I şi,

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{3_{j,k}} - T_{1_{j,k}}}{2\Delta r}, \; \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{T_{3_{j+1,k}} - T_{1_{j-1,k}}}{2\Delta \theta}, \; \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T_{3_{j,k+1}} - T_{1_{j,k-1}}}{2\Delta z} \tag{6}$$

pentru nivelul II, respectiv

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{T_{2_{j,k}} - 2T_{1_{j,k}} + T_{0_{j,k}}}{2\Delta r}, \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{T_{1_{j+1,k}} - 2T_{1_{j,k}} + T_{1_{j-1,k}}}{2\Delta \theta},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{T_{1_{j,k+1}} - 2T_{1_{j,k}} + T_{1_{j,k-1}}}{2\Delta z} \tag{7}$$

pentru nivelul I şi

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{T_{3_{j,k}} - 2T_{2_{j,k}} + T_{1_{j,k}}}{2\Delta r}, \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{T_{2_{j+1,k}} - 2T_{2_{j,k}} + T_{2_{j-1,k}}}{2\Delta \theta},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{T_{2_{j,k+1}} - 2T_{2_{j,k}} + T_{2_{j,k-1}}}{2\Delta z} \tag{8}$$

pentru nivelul II.

Cele două forme ale ecuaţiilor energiei, împreună cu condiţiile la limită se rezolvă iterativ în MathCAD200 cu ajutorul blocului "Given-Minerr" pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii neliniare. Metodele iterative pe care le posedă acest program sunt: Conjugate – gradient, Levenberg –Marquardt (variantă modificată) şi quasi - Newton. S-au testat succesiv cele trei metode iterative, constatându-se că metoda Levenberg –Marquardt conduce la soluţii viabile. Prin această metodă se estimează, la fiecare pas, primele derivate ale erorilor, cu respectarea variabilelor ce se calculează, creându-se matricea Jacobi J. Se rezolvă, apoi, ecuaţia matriceală: $J \cdot s = -f(x)$, unde s este pasul şi x este vectorul estimărilor curente pentru variabilele necunoscute.

Şirul iteraţiilor se termină când:

1. Nu mai este posibilă reducerea semnificativă a normei vectorului erorilor (ceea ce se poate controla, de altfel, din variabila de sistem TOL) sau când
2. s se apropie foarte mult de zero, adică norma vectorului erorilor devine mai mare decât max(TOL).

Modificările introduse de MathCAD la metoda de bază sunt:

1. La valorile care nu sunt soluţii şi la care solver – ul se opreşte pentru prima dată, se adaugă o mică valoarea aleatorie şi se încearcă din nou. Aceasta conduce la reducerea timpului de atingere a criteriului de convergenţă.
2. Dacă în blocul "Given-Minerr" s-au introdus constrângeri ale necunoscutelor de tipul inegalităţilor, se reduc valorile necunoscutelor, de la care se porneşte şirul iteraţiilor , la cele care satisfac inegalităţile.

Pe baza acestei ultime modificări, în blocul de calcul al ecuației energiei discretizată, pe lângă condițiile la limită (C1) și (C2) s-au introdus și următoarele inegalități:

$$600 \geq T_1 \geq T_{in}\ , \qquad 600 \geq T_2 \geq T_{in}\ . \qquad (9)$$

Valoarea 600 reprezintă o valoare maximă a temperaturii filmului de lubrifiant (in ^{0}K), de la care stabilitatea chimică a acestuia

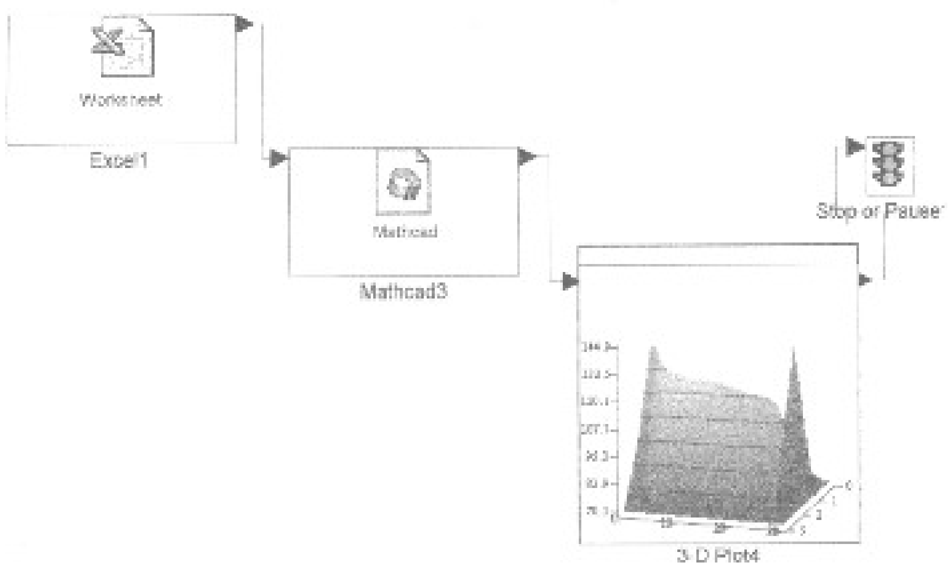

Fig.2
Programul de calcul al gradientului termic realizat în MathConnex200

se pierde, el namaivând calități de ungere. T_{in} este temperatura lubrifiantului la intrarea în cupla tribologică (măsurabilă). T_1 și T_2 sunt, după cum s-a afirmat mai înainte, matricile valorilor maxime ale temperaturilor în planele r_i, θ_j situate la cele două nivele: prima treime din grosimea filmului și cea de a doua treime.

Ca valori inițiale de la se pornesc iterațiile succesive se fixează valorile temperaturii lubrifiantului la intrarea în zona contactului (T_{in}=343,5 ^{0}K). Rezultă, în final, deci două valori maxime T_1 și T_2 pentru același punct al gridului *j,k*. Cum importantă este valoarea maximă a fluidului, se reține maximul dintre cele două valori și se construiește matricea $T_{max_{i,j}}$.

Având în vedere cele de mai sus s-a realizat un program de determinare a gradientului termic în pelicula de lubrifiant în mediul de lucru MathConnex2000 (fig.2). Valorile iniţiale se citesc de către MathCAD2000 dintr-un fişier Excel, putându-se, astfel, modifica rapid datele de intrare. Fişierul MathCAD rezolvă, prin metoda Levenberg – Marquardt modificată, ecuaţia energiei discretizată. Valorile gradientului termic, soluţiile sistemului neliniar, se afişează grafic automat. Timpul de calcul pe un PC Pentium II cu frecvenţa de lucru de 200MHz pentru rezolvarea ecuaţiei energiei în cazul unei matrici de 331x4x4 a fost de 2h şi 40'.

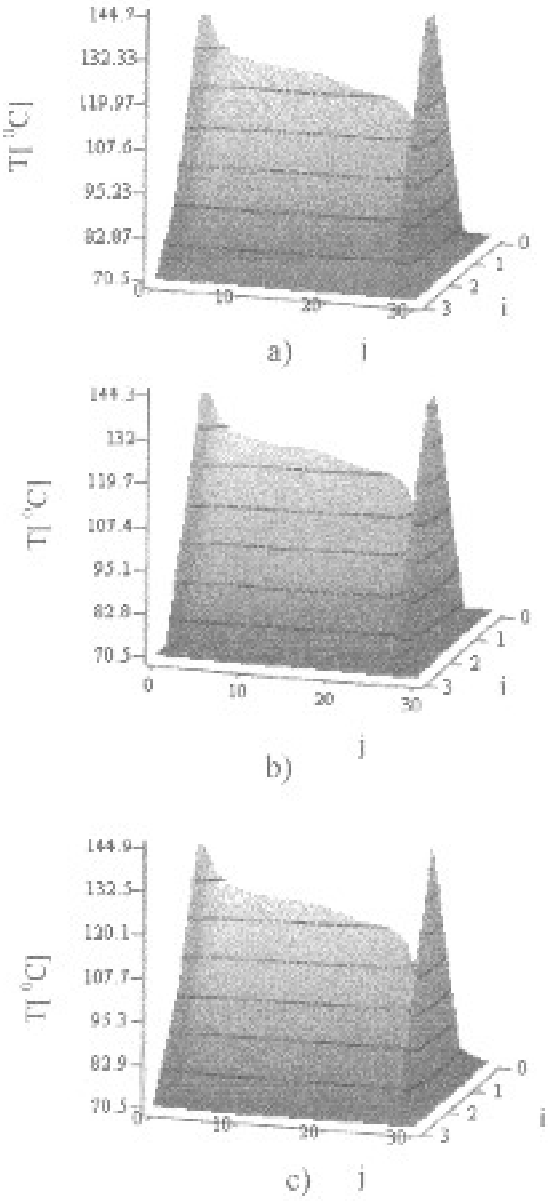

Fig. 3
Gradientul termic

APLICAȚIE NUMERICĂ

Programul a fost testat pentru determinarea gradientului termic din pelicula de lubrifiant cuprinsă în cavitatea dintre două curbe de contact simultan la angrenajul melcat globoidal, în cazul utilizării a trei tipuri de uleiuri de ungere:

1) Shell Tivella WB, cu vâscozitatea $\nu_{40^0C} = 234$ cSt,
2) Shell Morlina 10, $\nu_{40^0C} = 10$ cSt,
3) Petrom T90 EP2, $\nu_{40^0C} = 195$ cSt.

Gradientul termic obținut prin rezolvarea ecuației energiei cu condițiile limită impuse, în cele trei cazuri, este prezentat în figura 3:

a) pentru Shell Morlina 10, b) pentru Petrom T90 EP2, c) pentru Shell Tivella WB.

Rezultatele obținute în acest caz confirmă faptul că în zona contactului efectiv (j=3 și j=29) temperatura în filmul de lubrifiant crește de la valoarea de 70,5 ^{0}C, cât are uleiul din baia reductorului, la valori de până la 144,9 ^{0}C.

Valoarea maximă a temperaturii instantanee se obține pentru uleiul cu vâscozitatea dinamică mai mare.

CONCLUZIE

Modelul matematic de rezolvare a ecuației energiei conduce la rezultate numerice confirmate de cele existente în literatura de specialitate obținute în urma măsurătorilor experimentale. Prezintă avantajul flexibililății în sensul ca se pot modifica ușor condițiile la limită pentru diverse cazuri de ungere și, deși a fost conceput pentru cazul angrenajului melcat globoidal, se poate ușor adapta oricărui tip de cuplă tribologică.

Bibliografie

1. **Gh. Dodescu,** Metode de calcul numeric, EDP, București, 1976
2. **http:\\www.mathsoft.com**
3. **Lubrecht, A. A., ș.a.,** Multigrid, An Alternative Method for Calculating Film Thickness and Pressure Profiles in Elastohydrodynamically Lubricated Line Contacts, *Trans. of the ASME, Journal. of Trib., 1986*
4. **Dowson, D.,** A Generalized Reynolds Equation for Fluid Film Lubrication, *International Journal of Mechanical Science, Pergamon Press Ltd., vol. 4, 1962*
5. **Fedorciuc – Onișa, C.,** Study Regarding the Increasing Possibilities of Reliability for Globoid Worm Gear, *Research and Development Conference of the Hungarian Academy of Science, Godollo, 1999*, 35-38

7. **Simon, V.,** Egy új tipusú globoid csigahajtás jellemzői. Magyar Tudomanyos Akademia, *Budapest, 1996*

MATHEMATICAL MODEL FOR DETERMINATION OF THERMAL GRADIENT INSIDE OF THE FILM FLUID LUBRICANT

Abstarct. The problem of the establishing of the thermal gradient inside the film lubricant was widely taken into account during the last ten years and that for the obtaining more information about the lubrication conditions. The energy equation gives the instantaneous temperature in film lubricant and it is solved together with the viscosity and density equations. There is, finally, a highly nonlinear system of equations which can be solved by various mathematical methods.

This paper presents a mathematical model for solving the energy equation by aid of a program, made in MathConnex2000.

Primit 18.10.2000

Universitatea de Nord Baia Mare
Facultatea de Inginerie
Str.Victor Babeş nr. 62A
4800-Baia Mare
ROMANIA
E-mail: onisa.art@alphanet.ro