Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 9(1999-2000), 69-78

DESPRE STUDIUL CONVEXITĂŢII FUNCŢIILOR NEDERIVABILE

Gabriella KOVÁCS

Noţiunea de funcţie convexă este un concept important al matematicii moderne.

Studiul funcţiilor $f : D \subseteq R \to R$ în analiza matematică şcolară, conform programei de bacalaureat, se referă şi la proprietăţile de convexitate, concavitate. Manualele de liceu, ca şi tratatele clasice [2], [3] ne oferă pentru stabilirea acestor proprietăţi două, cel mult trei posibilităţi, după cum urmează.

1. Metodă bazată pe definiţia funcţiei convexe (concave).
Cercetăm dacă inegalitatea caracteristică funcţiei convexe (concave)

(*) $$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \le (\ge) \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \\ \forall x_1, x_2 \in I, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1], \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

este valabilă pe anumite intervale I ale domeniului de definiţie.

2. Metodă bazată pe semnul derivatei secunde f''.

Stabilim dacă are loc inegalitatea

(**) $$f''(x) \ge (\le) 0, \forall x \in I$$

pe anumite intervale I ale domeniului de definiţie.
Semnul pozitiv indică convexitatea funcţiei f, iar cel negativ concavitatea funcţiei pe intervalul respectiv.

3. Metodă bazată pe monotonia derivatei de ordinul întâi f'.
Derivata f' crescătoare pe intervalul I implică f convexă, iar f' descrescătoare implică f concavă pe I.

Inegalitatea (*) din definiţia funcţiei convexe (concave) conţine trei valori ale funcţiei f. Din acest motiv verificarea ei pe cale directă poate fi foarte dificilă şi uneori chiar imposibilă. Inegalitatea (**) cu un singur argument x şi f'' având proprietatea lui Darboux pare mai rezonabilă. *Dar cum să procedăm în cazul funcțiilor care nu sunt derivabile?*

Exemplu. Schițând graficul funcției

$$f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to R, f(x)=|tg(x)|$$

"se vede" că ea este convexă, dar nici una dintre metodele de mai sus nu ne furnizează acest rezultat: verificarea definiției convexității este dificilă, iar funcția f fiind nederivabilă în $x_0=0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, ultimele două metode rămân și ele inoperante. Pe de altă parte, o apreciere pur vizuală rareori poate fi pe deplin de încredere.

Scopul prezentei lucrări este să formulăm un algoritm care stabilește dacă funcția $f:I\subseteq R\to R$ este sau nu convexă respectiv concavă pe intervalul I, algoritm bazat numai pe studiul continuității funcției f și al monotoniei unei derivate laterale (f_s' sau f_d'), fără utilizarea derivatelor de ordinul întâi sau doi.

Începem cu prezentarea rezultatelor teoretice necesare, bazându-ne în mare măsură pe lucrarea [1]. Prin I notăm un interval $I\subseteq R$, iar prin $\operatorname{int} I$ interiorul lui I.

Teorema 1. *Fie $f:I\to R$ convexă. Atunci f este derivabilă lateral, atât la stânga cât și la dreapta în fiecare punct din* $\operatorname{int} I$.

În plus funcțiile f_s', f_d' sunt crescătoare pe $\operatorname{int} I$.

De asemenea are loc $f_s'(x)<f_d'(x), \forall x\in\operatorname{int} I$.

Demonstrație.

Fie $x_0\in\operatorname{int} I$ arbitrar și $d:I-\{x_0\}\to R, d(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Mai întâi arătăm că funcția d este crescătoare pe $I-\{x_0\}$.

Considerăm $x,x'\in I-\{x_0\}$, $x<x'$.

Avem de arătat că $d(x)\le d(x')$, adică

(1) $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}.$$

Deosebim trei cazuri.

I. $x<x'<x_0$.

Avem $$x'=\frac{x_0-x'}{x_0-x}\cdot x+\frac{x'-x}{x_0-x}\cdot x_0.$$

Deoarece funcția f este convexă, rezultă inegalitatea

$$f(x') \le \frac{x_0 - x'}{x_0 - x} \cdot f(x) + \frac{x' - x}{x_0 - x} \cdot f(x_0),$$

care este echivalentă cu (1).

II. $x < x_0 < x'$.

Avem $$x_0 = \frac{x' - x_0}{x' - x} \cdot x + \frac{x_0 - x}{x' - x} \cdot x'.$$

Deoarece funcția f este convexă, rezultă inegalitatea

$$f(x_0) \le \frac{x' - x_0}{x' - x} \cdot f(x) + \frac{x_0 - x}{x' - x} \cdot f(x'),$$

care este echivalentă cu (1).

III. $x_0 < x < x'$.

Avem $$x = \frac{x' - x}{x' - x_0} \cdot x_0 + \frac{x - x_0}{x' - x_0} \cdot x'.$$

Deoarece funcția f este convexă, rezultă inegalitatea

$$f(x) \le \frac{x' - x}{x' - x_0} \cdot f(x_0) + \frac{x - x_0}{x' - x_0} \cdot f(x'),$$

care este echivalentă cu (1).

Funcția d fiind monotonă pe $I - \{x_0\}$, următoarele limite laterale există și sunt finite

$$\lim_{x \to x_0, x < x_0} d(x) = \lim_{x \to x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0, x > x_0} d(x) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

adică f este derivabilă la stânga și la dreapta în x_0.

Raționamentul este valabil pentru oricare $x_0 \in \operatorname{int} I$.

Să arătăm că f_s' este crescătoare pe $\operatorname{int} I$.

Fie $x_1, x_2 \in \operatorname{int} I, x_1 < x_2$ și $x, x' \in \operatorname{int} I$ astfel ca $x < x_1 < x' < x_2$. Pentru oricare $x_0 \in \operatorname{int} I$ funcția d fiind crescătoare, succesiv rezultă

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x') - f(x_1)}{x' - x_1} \le \frac{f(x') - f(x_2)}{x' - x_2}.$$

Trecând la limită $x \to x_1, x < x_1$ și apoi $x' \to x_2, x' < x_2$

în inegalitatea $$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x') - f(x_2)}{x' - x_2}$$

obținem $f_s'(x_1) \le f_s'(x_2)$. Deci f_s' este crescătoare.

Demonstrația inegalitații $f_d'(x_1) \le f_d'(x_2)$ este asemănătoare.

Trecând la limită $x \to x_1, x < x_1$ respectiv $x' \to x_1, x' > x_1$

în inegalitatea $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \dfrac{f(x') - f(x_1)}{x' - x_1}$

obținem $f_s'(x_1) \le f_d'(x_1)$.

Următorul rezultat privind funcțiile concave se demonstrează asemănător.

Teorema 2. *Fie $f : I \to R$ concavă. Atunci f este derivabilă lateral, atât la stânga cât și la dreapta în fiecare punct din* $\operatorname{int} I$.

În plus funcțiile f_s', f_d' sunt descrescătoare pe $\operatorname{int} I$.

De asemenea are loc $f_s'(x) > f_d'(x), \forall x \in \operatorname{int} I$.

Consecință. Dacă există $x_0 \in \operatorname{int} I$ în care funcția $f : I \to R$ nu este derivabilă la stânga (dreapta), atunci funcția f nu este nici convexă și nici concavă pe I, și nici pe $\operatorname{int} I$.

Observație. Există funcții convexe (concave) ale căror derivate laterale nu au proprietatea lui Darboux. Iată ca exemplu funcția convexă

$f : (-1,1) \to R, f(x) = |x|$ cu $f_s'(x) = \begin{cases} -1, x \in (-1,0] \\ 1, x \in (0,1) \end{cases}$ fără

proprietatea lui Darboux pe intervalul $(-1,1)$.

Teorema 3. *Fie $f : I \to R$ convexă (concavă). Atunci f este continuă în fiecare punct interior al intervalului I.*

Demonstrație.

Fie $x_0 \in \operatorname{int} I$ arbitrar. Pe baza Teoremei 1 (2), funcția f este derivabilă la stânga și este derivabilă la dreapta în x_0. În relația

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

trecând la limită $x \to x_0, x < x_0$, obținem $\lim\limits_{x \to x_0, x < x_0} f(x) = f(x_0)$.

În aceeași relație trecând la limită $x \to x_0, x > x_0$ obținem $\lim\limits_{x \to x_0, x > x_0} f(x) = f(x_0)$. Deducem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, deci f continuă în x_0.

Consecință. Dacă există $x_0 \in \operatorname{int} I$ în care funcția $f : I \to R$ nu este continuă, atunci funcția f nu este nici convexă și nici concavă pe I, și nici pe $\operatorname{int} I$.

Observație. Există funcții convexe (concave) discontinue în capetele intervalului I. Să privim ca exemplu funcția convexă

$$f:[-1,1]\to R, f(x)=\begin{cases}|x|, x\in(-1,1)\\ 2, x\in\{-1,1\}\end{cases}.$$

În continuare, pentru a demonstra reciprocele Teoremelor 1 și 2, vom avea nevoie de versiunile teoremelor lui Fermat și Lagrange adaptate la derivate laterale.

Teorema 4. (Teorema lui Fermat pentru derivate laterale)

i) *Dacă funcția $f:I\to R$ are maxim (minim) local în $x_0\in \operatorname{int} I$ și f este derivabilă la stânga în x_0, atunci $f_s'(x_0)\geq 0$ ($f_s'(x_0)\leq 0$).*

ii) *Dacă funcția $f:I\to R$ are maxim (minim) local în $x_0\in \operatorname{int} I$ și f este derivabilă la dreapta în x_0, atunci $f_d'(x_0)\leq 0$ ($f_d'(x_0)\geq 0$).*

Demonstrație.

i) Fie $x_0\in \operatorname{int} I$ punct de maxim local al lui f și f derivabilă la stânga în x_0. Considerăm $\varepsilon>0$ astfel încât $(x_0-\varepsilon, x_0]\subset \operatorname{int} I$ și $f(x)\leq f(x_0), \forall x\in(x_0-\varepsilon, x_0]$.

Atunci pentru orice $x\in(x_0-\varepsilon, x_0)$ avem

$$f(x)-f(x_0)\leq 0, x-x_0<0, \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$$

și în consecință $\lim\limits_{x\to x_0, x<x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f_s'(x_0)\geq 0$.

Celelalte cazuri se tratează analog.

Teorema 5. (Teorema lui Lagrange pentru derivate laterale)

i) *Dacă funcția $f:[a,b]\to R$ este continuă pe $[a,b]$ și este derivabilă la stânga pe $(a,b]$, atunci există $\xi_1,\xi_2\in(a,b]$ astfel ca*

$$f_s'(\xi_1)\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq f_s'(\xi_2).$$

ii) *Dacă funcția $f:[a,b]\to R$ este continuă pe $[a,b]$ și este derivabilă la dreapta pe $[a,b)$, atunci există $\xi_1,\xi_2\in[a,b)$ astfel ca*

$$f_d'(\xi_1)\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq f_d'(\xi_2).$$

Demonstrație.

Considerăm funcția $g:[a,b]\to R, g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$

Funcția g este continuă pe $[a,b]$ și $g(b)=g(a)$.

Fie $u,v\in[a,b]$ astfel încât $g(u)=\min\limits_{x\in[a,b]}g(x)$ şi $g(v)=\max\limits_{x\in[a,b]}g(x)$.

Dacă $g(u)=g(v)$, atunci g este funcţie constantă iar $f(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x+k,\forall x\in[a,b]$ este o funcţie liniară. În acest caz f este evident derivabilă, $f_s'(x)=f_d'(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a},\forall x\in[a,b]$ şi concluzia teoremei este dovedită.

Dacă însă $g(u)\neq g(v)$, atunci avem $g(u)<g(v)$ şi $u\neq v$.
Dacă g îşi atinge valoarea maximă în a, cum $g(b)=g(a)$, despre punctul u în care g îşi atinge minimul rezultă că $u\in(a,b)$. În acest caz vom lua $\xi_1=b$ şi $\xi_2=u$.
Dacă g îşi atinge valoarea minimă în a, cum $g(b)=g(a)$, despre punctul v în care g îşi atinge maximul rezultă că $v\in(a,b)$. În acest caz vom lua $\xi_1=v$ şi $\xi_2=b$.
Dacă $u,v\in(a,b)$ considerăm $\xi_1=v$ şi $\xi_2=u$.
Presupunând acum funcţia f derivabilă la stânga pe $(a,b]$, avem g de asemenea derivabilă la stânga pe $(a,b]$. Aplicând teorema lui Fermat pentru derivate laterale (Teorema 4) obţinem $g_s'(\xi_1)\leq 0$ iar $g_s'(\xi_2)\geq 0$, adică

$$f_s'(\xi_1)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq 0 \text{ şi } f_s'(\xi_2)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geq 0.$$

Partea referitoare la derivatele la dreapta se demonstrează în mod asemănător.

Observaţie. În Teorema 5 ipoteza de continuitate a funcţiei f este esenţială. Iată o funcţie derivabilă la stânga pe $(-1,1]$ având $f_s'(x)=1,\forall x\in(-1,1]$, dar discontinuă într-un singur punct $0\in[-1,1]$, pentru care concluzia teoremei nu se menţine:

$$f:[-1,1]\to R, f(x)=\begin{cases}x+1, x\in[-1,0]\\ x-1, x\in(0,1]\end{cases}.$$

Teorema 6. (Caracterizarea funcţiilor convexe)

Următoarele afirmaţii despre funcţia $f:\operatorname{int} I\to R$ sunt echivalente.

(i) *Funcţia f este convexă.*

(ii) *Funcţia f este continuă şi este derivabilă la stânga, având f_s' crescătoare.*

(iii) *Funcţia f este continuă şi este derivabilă la dreapta,* *având f'_d crescătoare.*

Demonstrație.

Implicațiile $(i) \Rightarrow (ii)$ respectiv $(i) \Rightarrow (iii)$ rezultă combinând Teorema 1 cu Teorema 3.

Să dovedim $(ii) \Rightarrow (i)$.

Fie $x_1, x_2 \in \operatorname{int} I$, $x_1 < x_2$, arbitrare. Fie $x \in (x_1, x_2)$.
Pe baza teoremei lui Lagrange pentru derivate laterale (Teorema 5) există $\xi_1, \xi_2 \in (x_1, x]$ și există $\xi'_1, \xi'_2 \in (x, x_2]$ astfel ca

$$f'_s(\xi_1) \le \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le f'_s(\xi_2)$$

$$f'_s(\xi'_1) \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \le f'_s(\xi'_2).$$

Funcția f'_s fiind crescătoare, din $\xi_2 \le x < \xi'_1$ și relațiile de mai sus obținem

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le f'_s(\xi_2) \le f'_s(\xi'_1) \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

De aici reținem $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$, inegalitate echivalentă cu

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2).$$

Deducem că funcția f este convexă.
Demonstrația implicației $(iii) \Rightarrow (i)$ este asemănătoare.

Următorul rezultat referitor la funcțiile concave se demonstrează în mod analog.

Teorema 7. (Caracterizarea funcțiilor concave)

Următoarele afirmații despre funcția $f : \operatorname{int} I \to R$ sunt echivalente.

(i) *Funcția f este concavă.*

(ii) *Funcția f este continuă și este derivabilă la stânga, având f'_s descrescătoare.*

(iii) *Funcția f este continuă și este derivabilă la dreapta, având f'_d descrescătoare.*

Teorema 8. *Dacă funcția* $f:(a,b)\subseteq R\to R$, *unde* $a,b\in R\cup\{-\infty,+\infty\}$, $a<b$ *este convexă (concavă), atunci există limitele laterale* $\lim\limits_{x\to a,x>a} f(x)$ *și* $\lim\limits_{x\to b,x<b} f(x)$.

Demonstrație.

Fie f convexă. Conform Teoremei 1 derivata laterală f_s' este crescătoare. Rezultă că există $t\in R$ astfel încât $f_s'(x)\le 0, \forall x\in(a,t)$ sau $f_s'(x)\ge 0, \forall x\in(a,t)$.

Arătăm că f este monotonă pe (a,t). De aici rezultă că limita laterală $\lim\limits_{x\to a,x>a} f(x)$ există (finită sau nu).

Conform Teoremei 3 f este continuă pe (a,b).

Fie $x_1, x_2\in(a,t), x_1<x_2$, arbitrare.. Aplicând Teorema 5 (Teorema lui Lagrange pentru derivate laterale) funcției f pe intervalul $[x_1,x_2]$, găsim că diferența $f(x_2)-f(x_1)$ are semnul derivatei laterale f_s', și deci funcția f este monotonă pe (a,t).

Cazurile rămase se tratează în mod analog.

Teorema 9. Fie $a,b\in R, a<b$.

Funcția $f:[a,b)\to R$ *convexă (concavă) pe* (a,b) *este convexă (concavă) pe* $[a,b)\Leftrightarrow f(a)\ge(\le)\lim\limits_{x\to a,x>a} f(x)$.

Funcția $f:[a,b)\to R$ *convexă (concavă) pe* (a,b) *este convexă (concavă) pe* $(a,b]\Leftrightarrow f(b)\ge(\le)\lim\limits_{x\to b,x<b} f(x)$.

Demonstrație.

Considerăm $f:[a,b)\to R$ convexă pe (a,b).

Conform teoremei precedente $\lim\limits_{x\to a,x>a} f(x)$ există. Fie $t>0$ astfel încât $a+2t\in(a,b)$. Dacă funcția f este convexă pe $[a,b)$, are loc inegalitatea $f(a+t)\le\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(a+2t)$. Trecând la limită $t\to 0, t>0$ obținem $\lim\limits_{x\to a,x>a} f(x)\le f(a)$. Etc.

Rezultatele prezentate mai sus justifică următoarea schemă pentru cercetarea convexității (concavității) funcțiilor $f:I\to R$ pe intervalul I.

Schemă pentru cercetarea convexităţii (concavităţii) funcţiilor $f : I \to R$ pe intervalul I

1. Studiem continuitatea funcţiei f.

- f este continuă pe $\operatorname{int} I$ $\to$ pasul 2.
- Există $x_0 \in \operatorname{int} I$ în care f nu este continuă $\to f$ nu este convexă şi nici concavă pe I.

2. Studiem derivabilitatea la stânga a lui f.

- f este derivabilă la stânga pe $\operatorname{int} I$ $\to$ pasul 3.
- Există $x_0 \in \operatorname{int} I$ în care f nu este derivabilă la stânga $\to f$ nu este convexă şi nici concavă pe I.

3. Studiem monotonia derivatei laterale f'_s.

- f'_s crescătoare pe $\operatorname{int} I$ $\to f$ este convexă pe $\operatorname{int} I$
  dacă $I \neq \operatorname{int} I$ $\to$ pasul 4.
- f'_s descrescătoare pe $\operatorname{int} I$ $\to f$ este concavă pe $\operatorname{int} I$
  dacă $I \neq \operatorname{int} I$ $\to$ pasul 4.
- f'_s nu este monotonă pe $\operatorname{int} I$ $\to f$ nu este convexă şi nici concavă pe I.

4. Avem f convexă (concavă) pe $\operatorname{int} I$.

- Dacă $I = [a, b)$ unde $a \in R, b \in R \cup \{+\infty\}$
  studiem limita laterală $\lim\limits_{x \to a, x > a} f(x)$;
  $f(a) \geq (\leq) \lim\limits_{x \to a, x > a} f(x) \quad \to \quad f$ convexă (concavă) pe I
- Dacă $I = (a, b]$ unde $a \in R \cup \{-\infty\}, b \in R$
  studiem limita laterală $\lim\limits_{x \to b, x < b} f(x)$;
  $f(b) \geq (\leq) \lim\limits_{x \to b, x < b} f(x) \quad \to \quad f$ convexă (concavă) pe I
- Dacă $I = [a, b]$ unde $a, b \in R$
  studiem limitele laterale în a şi b;
  $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a, x > a} f(x) \geq (\leq) f(a) \\ \lim\limits_{x \to b, x < b} f(x) \geq (\leq) f(b) \end{cases} \quad \to \quad f \text{ convexă (concvă) pe } I$$

  Dacă în cazurile de mai sus inegalităţile specificate nu au loc, atunci f nu este convexă (concavă) pe I.

Observaţie. Pasul 4 va fi efectiv numai atunci când intervalul I nu este interval deschis.

Înlocuind în schema de mai sus derivata laterală la stânga cu cea de derivată la dreapta, obţinem o a doua schemă valabilă.

Exemplu. Funcţia $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to R, f(x)=|tg(x)|$ considerată în prima parte a lucrării este continuă şi este derivabilă la stânga pe $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f_s'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{\cos^2(x)}, x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right]\\ \frac{1}{\cos^2(x)}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$.

Cunoscând monotonia funcţiei $\cos(x)$, deducem cu uşurinţă că f_s' este crescătoare pe $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Aplicând Teorema 6 rezultă că funcţia f este convexă pe $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Bibliografie

1. Cobzaş, Şt.: Analiză matematică (Calcul diferenţial), Presa Universitară Clujană, 1997
2. Fihtenholţ, G.M.: Curs de calcul diferenţial şi integral, Editura Tehnică, Bucureşti 1963-1965
3. Sireţchi, Gh.: Calcul diferenţial şi integral, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti 1985
4. Analiză matematică, manual pentru clasele a XI-a, diferite ediţii

ABOUT THE STUDY OF CONVEXITY OF NONDERIVABLE FUNCTIONS

Abstract. A convex function has finite lateral derivatives in every interior point of its domain and also it is continuous in every interior point of its domain. Based on these and related properties, we formulate a simple algorithm that determines about a given $f:I\subseteq R\to R$ function if it is or it isn't convex (concave) on I.

Primit 10. 10. 2000.

Universitatea de Nord Baia Mare
Facultatea de Ştiinţe, Catedra de Matematică şi Informatică
Str. Victoriei 76, 4800 Baia Mare, ROMANIA
E-mail: kovacsg@univer.ubm.ro