Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 9(1999-2000), 91 - 96

TEOREMA LAX-MILGRAM CU APLICAŢII LA PROBLEMA PERTURBATĂ LAPLACE SUB CONDIŢII DIRICHLET

Cristinel MORTICI

Fie $D \subset R^N$ un deschis si $A : D(A) \subset L^2(D) \to L^2(D)$ un operator. Consideram urmatoarea problema:

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u + Au = f & pe \quad D \\ u = 0 & pe \quad \partial D \end{cases} .$$

Pentru $A = 0$ se obtine problema studiata in [1].

Definitie. $u \in H_0^1(D)$ este solutie slaba a problemei (1) daca

$$(2) \qquad \int_D \nabla u \nabla v + \int_D uv + \int_D Au \cdot v = \int_D fv \quad , \quad \forall v \in H_0^1(D).$$

In continuare, vom da o teorema de existenta si unicitate a solutiei slabe a problemei (1), apoi modalitatea de trecere la solutia clasica.

Teorema 1. *Presupunem ca $A : D(A) \subset L^2(D) \to L^2(D)$ este un operator liniar, continuu si monoton. Atunci pentru orice $f \in L^2(D)$, problema (1) are o unica solutie slaba $u \in H_0^1(D)$. In plus, daca A este autoadjunct, atunci u realizeaza*

$$(3) \qquad \min_{v \in H_0^1(D)} \left\{ \frac{1}{2} \int_D \left(|\nabla v|^2 + v^2 + Av \cdot v \right) - \int_D fv \right\}.$$

Vom utiliza urmatoarea

Teorema 2 (Lax-Milgram). *Fie H un spatiu Hilbert si $a : H \times H \to R$ o forma biliniara, continua si coerciva. Atunci pentru orice $f \in H'$ exista un* *unic $u \in H$ astfel incat*

(4) $$a(u,v) = f(v) \quad , \quad \forall v \in H.$$

In plus, daca a este simetrica, atunci u realizeaza

(5) $$\min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v,v) - f(v) \right\}.$$

Solutia este data in [1], pag.84 si foloseste teorema de reprezentare a lui Riesz si teorema Picard-Banach de punct fix.

Demonstratia teoremei 1. Lucram in $H = H_0^1(D)$ inzestrat cu produsul scalar

(6) $$(u,v)_{H_0^1} = (u,v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}.$$

Norma indusa de produsul scalar este

(7) $$\|u\|_{H_0^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

Pe H consideram forma biliniara

(8) $$a(u,v) = \int_D \nabla u \nabla v + \int_D uv + \int_D Au \cdot v.$$

Vom demonstra ca este continua si coerciva. Intr-adevar,

(9) $$a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2} + (u,v)_{L^2} + (Au, v)_{L^2},$$

sau echivalent:

(9′) $$a(u,v) = (u,v)_{H_0^1} + (Au,v)_{L^2}.$$

Rezulta

$$|a(u,v)| \le |(u,v)|_{H_0^1} + |(Au,v)|_{L^2} \le \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} + \|Au\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \le$$

$$\le \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} + c\,\|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \le \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} + c\,\|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \le$$

$$\le (c+1)\,\|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}.$$

Deci $a(u,v)$ este continua (am folosit faptul ca $\|u\|_{L^2} \le \|u\|_{H_0^1}$). Forma este si coerciva:

$$a(v,v) = \|v\|_{H_0^1}^2 + (Av,v)_{L^2} \ge \|v\|_{H_0^1}^2.$$

Consideram $f \in H'$ data de formula

(10) $$f(v) = \int_D fv, \quad \forall v \in H.$$

Putem aplica teorema Lax-Milgram pentru forma biliniara $a(u,v)$ data de (8) si $f \in H'$ data de (10). Asadar exista si este unic $u \in H_0^1(D)$ astfel incat

(11) $$a(u,v) = f(v), \quad \forall v \in H_0^1(D),$$

adica tocmai (2), ceea ce inseamna ca u este solutie slaba a problemei (1). Daca A este autoadjunct, atunci a este simetrica si are loc (3).□

Vom da urmatorul rezultat de revenire la solutia clasica a problemei (1):

Teorema 3. *Presupunem ca $D \subset R^N$ este de clasa C^1 si $f \in C(\overline{D})$. Fie $u \in H_0^1(D)$ o solutie slaba a problemei (1). Daca in plus, $u \in C^2(\overline{D})$, atunci u este solutie clasica a problemei (1).*

Demonstratie. Din faptul ca $u \in H_0^1(D) \cap C(\overline{D})$, rezulta ca $u = 0$ pe ∂D ([1], pag.171). Cum u este solutie slaba pentru problema (1) si $H_0^1(D)$ este densa in $L^2(D)$, avem

$$\int_D (-\Delta u + u + Au - f)v = 0 \quad , \quad \forall v \in H_0^1(D). \tag{12}$$

Rezulta ca $-\Delta u + u + Au - f = 0$ *apt* pe D.Din continuitate avem:

$$-\Delta u + u + Au = f \quad pe \quad D, \tag{13}$$

adica u este solutie clasica.□

Remarca. Daca înlocuim in (1) pe A cu $A - I$, obtinem o alta forma a problemei (1):

$$\begin{cases} -\Delta u + Au = f \quad pe \quad D \\ u = 0 \quad pe \quad \partial D \end{cases} \tag{14}$$

si rezulta urmatoarea:

Teorema 4. *Fie A un operator liniar, continuu astfel incat $A - I$ este monoton. Atunci pentru orice $f \in L^2(D)$, problema (14) are o solutie slaba unica $u \in H_0^1(D)$. In plus, daca A este si autoadjunct, atunci u realizeaza*

$$\min_{v \in H_0^1(D)} \left\{ \frac{1}{2} \int_D (|\nabla v|^2 + v \cdot Av) - \int_D fv \right\}. \tag{15}$$

Observatie. Daca in teorema 4 se alege $A = I$, se obtine cazul particular tratat in [1], pag.175.

CAZUL DOMENIULUI MARGINIT.

In continuare vom studia cazul cand $D \subset R^N$ este un deschis marginit si de clasa C^1, situatie in care are loc urmatoarea

Teorema 5 (Poincare). In conditiile de mai sus, exista $c > 0$ astfel incat

$$\|u\|_{L^p} \le c \, \|\nabla u\|_{L^p} \quad , \quad \forall u \in W_0^{1,p}(D). \tag{16}$$

In particular, in $H_0^1(D)$, expresia $\int\limits_D \nabla u \nabla v$ este un produs scalar care induce norma $\|\nabla u\|_{L^2}$ echivalenta cu $\|u\|_{H^1}$. Avem

(17) $$a\|u\|_{H^1} \leq \|\nabla u\|_{L^2} \leq b\|u\|_{H^1},$$

inegalitati pe care le vom folosi in cele ce urmeaza.

Teorema 6. *Fie $D \subset R^N$ un deschis marginit de clasa C^1 si $A : D(A) \subset L^2(D) \to L^2(D)$ un operator liniar, continuu, monoton. Atunci pentru orice $f \in L^2(D)$, problema*

(18) $$\begin{cases} -\Delta u + Au = f & \text{pe } D \\ u = 0 & \text{pe } \partial D \end{cases}$$

are o solutie slaba unica $u \in H_0^1(D)$. In plus, daca A este autoadjunct, atunci u realizeaza

(19) $$\min_{v \in H_0^1(D)} \left\{ \frac{1}{2} \int\limits_D (|\nabla v|^2 + v \cdot Av) - \int\limits_D fv \right\}.$$

Demonstratie. Consideram pe $H = H_0^1(D)$ forma bilinara

(20) $$a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2} + (Au, v)_{L^2}$$

si $f \in H'$ data de formula

(21) $$f(v) = (f,v)_{L^2} \quad , \quad \forall v \in H.$$

Vom arata ca $a(u,v)$ este forma biliniara, continua si coerciva, folosind (17), apoi se aplica Lax-Milgram.

$$|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|Au\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq b^2 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + c\|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \leq$$

$$\leq (b^2 + c)\|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.$$

$$a(v,v) = \|\nabla v\|_{L^2}^2 + (Av, v)_{L^2} \geq \|\nabla v\|_{L^2}^2 \geq a^2 \|v\|_{H^1}^2 . \square$$

Observatii. 1) Are loc si in acest caz un rezultat asemanator cu cel din teorema 3 de revenire la solutia clasica, iar demonstratia este aceeasi.

2) Conditia din teorema 6 ca A sa fie monoton este mai slaba decat aceea din teorema 4 ca $A - I$ sa fie monoton, pentru ca $A - I$ monoton$\Longrightarrow A$ monoton.

Exemplu. Fie $a \in C^2(\overline{D})$ astfel incat

(22) $$1 \leq a(t) \leq M \quad , \quad \forall t \in \overline{D}.$$

Definim $A : L^2(D) \to L^2(D)$ prin $Au := au$.

A este bine definita: $\int\limits_D |au|^2 \leq M \int\limits_D |u|^2$. Rezulta ca $au \in L^2(D)$. $A - I$ este monoton: $(Au - u, u)_{L^2} = \int\limits_D (a-1)u^2 \geq 0$. Suntem in conditiile teoremei 4.

Asadar problema

$$
\begin{cases} -\Delta u + au = f \quad pe \quad D \\ u = 0 \quad pe \quad \partial D \end{cases} \tag{23}
$$

are o solutie slaba unica $u \in H_0^1(D)$. Deoarece in acest caz A este simetric, u realizeaza minimul

$$
\min_{v \in H_0^1(D)} \left\{ \frac{1}{2} \int_D (|\nabla v|^2 + av^2) - \int_D fv \right\}. \tag{24}
$$

Daca D este marginit, atunci conditia (22) nu mai este necesara.

Bibliografie

[1] - **Brezis, H.,** *Analyse Fonctionnelle. Theorie et Applications.*

[2] - **Mortici, C.,** *Semilinear Equations with Strongly Monotone nonlinearity,* Le Matematiche, vol. LII(1997), Fasc.II, 387-392.

[2] - **Pascali, D., Sburlan, S.,** *Nonlinear Mappings of Monotone Type,* Ed. Academici, Bucuresti, 1978.

LAX-MILGRAM THEOREM AND APPLICATIONS TO PERTURBED LAPLACE PROBLEM WITH DIRICHLET CONDITIONS

Abstract. Using Lax-Milgram theorem, it is studied the problem

$$\begin{cases} -\Delta u + u + Au = f & on \quad D \\ u = 0 & on \quad \partial D \end{cases} \tag{1}$$

where $D \subset \mathbf{R}^n$ is open and $A : D(A) \subset L^2(D) \to L^2(D)$ is given. The results from this paper generalize the well known case $A = 0$ (e.g. [1]). The linear case is considered, then analogue results can be established in nonlinear case as variational inequalities.Finally, some applications are given.

Primit: 20.10.2000

Ovidius University, Dept. of Mathematics,
Bd. Mamaia 124, 8700 Constanta,
E-mail: cmortici@netscape.net