Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 9(1999-2000), 97 - 104

CONSECINŢE ALE POZITIVITĂŢII UNOR MATRICI

Constantin P. NICULESCU

Problema 35 din capitolul XVI a binecunoscutei culegeri de probleme de algebră a lui Năstăsescu şi colaboratorii [2] cere să se arate că dacă $F_1, \ldots F_n$ sunt mulţimi finite, atunci determinantul matricii $A = (a_{ij})_{i,j}$, unde

$$a_{ij} = \text{Card } (F_i \cap F_j),$$

este nenegativ. Demonstraţia oferită acolo constă în a arăta că A este de forma $A = B^T B$, pentru o anume matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$. În realitate, un rezultat mult mai precis şi mai general funcţionează, iar scopul notei de faţă este acela de a-l reliefa, urmând calea cea mai naturală, aceea a teoriei spectrale a matricilor autoadjuncte.

Începem deci cu o scurtă prezentare a acestei teorii. Cititorul interesat poate consulta cartea de Algebră liniară a lui I. M. Gelfand [3] pentru detalii suplimentare. Foarte instructivă este şi culegerea de probleme a lui I. M. Glazman şi Iu. I. Liubici [4].

Spectrul unei matrici $A \in M_n(\mathbb{C})$ se defineşte ca fiind mulţimea $\sigma(A)$ a tuturor numerelor complexe λ pentru care matricea $\lambda I - A$ nu este inversabilă. Neinvertibilitatea lui $\lambda I - A$ este echivalentă cu faptul că sistemul omogen

$$(\lambda I - A)x = 0 \tag{1}$$

are soluţii nebanale. Valorile $\lambda \in \mathbb{C}$ pentru care există vectori $v \in \mathbb{C}^n$ nenuli astfel că $Av = \lambda v$ poartă numele de **valori proprii** ale lui A. În acest mod, spectrul lui A constă din totalitatea valorilor proprii ale sale.

Neinvertibilitatea unei matrici este echivalentă de asemenea cu faptul că determinantul ei este nul. Prin urmare, spectrul constă din totalitatea rădăcinilor aşa numitului **polinom caracteristic** al lui A,

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \\ &= \lambda^n - \mathrm{Trace}\, A \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A. \end{aligned}$$

Prin termenul de **multiplicitate** a unei valori proprii vom înţelege dimensiunea subspaţiului vectorial $Ker\,(\lambda I - A)$, iar aceasta coincide cu multiplicitatea lui λ ca rădăcină a polinomului caracteristic.

Relaţiile Viète ne arată că

$$\mathrm{Trace}\, A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

este egal cu suma valorilor proprii, luate cu multiplicitatea lor, iar $\det A$ este egal cu produsul valorilor proprii, luate cu multiplicitatea lor.

O matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, se zice că este **autoadjunctă** dacă

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{C}^n; \tag{2}$$

aici $\langle \cdot, \cdot \rangle$ desemnează produsul scalar euclidian pe $\mathbb{C}^n$, definit prin formula

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

unde $x = (x_1, ..., x_n)$ şi $y = (y_1, ..., y_n)$. Este imediat că o matrice $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$, este autoadjunctă dacă şi numai dacă este egală cu **adjuncta sa,** $A^* = (a^*_{ij})_{i,j}$, unde

$$a^*_{ij} = \overline{a_{ji}} \quad \text{pentru orice } i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Teorema 1. *Spectrul oricărei matrici autoadjuncte A este constituit numai din numere reale.*

Demonstraţie. Fie $\lambda = \alpha + i\beta$ cu $\beta \neq 0$. Atunci

$$\langle \lambda x - Ax, x\rangle - \langle x, \lambda x - Ax\rangle = 2\beta i \, ||x||^2$$

astfel că aplicând inegalitatea Cauchy-Schawarz obţinem

$$2|\beta| \cdot ||x||^2 \leq 2 \, ||x|| \cdot ||\lambda x - Ax||$$

de unde rezultă că sistemul $Ax - \lambda x = 0$ nu are soluţii nenule i.e., $\lambda \notin \sigma(A)$. ■

Vom spune că o matrice A (necesar autoadjunctă) este **pozitivă** (şi notăm $A \geq 0$) dacă

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0 \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{C}^n.$$

Lemă. *Toate valorile proprii ale unei matrici A pozitive sunt numere pozitive.*

Se poate arăta că $A \geq 0$ dacă şi numai dacă $\sigma(A) \subset [0, \infty)$. Vezi orice curs universitar de Algebră liniară, de exemplu [3], sau [7]

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $\lambda \in \sigma(A)$, atunci potrivit unei observaţii de mai sus ar exista un vector nenul v astfel încât $Av = \lambda v$. Or,

$$0 \leq \langle Av, v\rangle = \lambda \langle v, v\rangle$$

şi cum $\langle v, v\rangle > 0$, concluzionăm că $\lambda \geq 0$. ■

Lema de mai sus este importantă deoarece permite reformularea matricială a inegalităţilor clasice privind funcţiile simetrice elementare. Spre exemplu, inegalitatea mediilor se poate reformula astfel: Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice pozitivă. Atunci

$$\frac{1}{n} \operatorname{Trace} A \geq (\det A)^{1/n}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $A = \lambda \cdot I$ pentru un anume număr $\lambda \geq 0$.Indicăm în continuare o importantă clasă de matrici pozitive, pusă în evidenţă de teoria aşa numiţilor determinanţi Gram. Pentru aceasta avem nevoie de noţiunea de produs hermitic.

Fie E un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{C}$. Numim **produs hermitic** pe E orice aplicaţie $B : E \times E \to \mathbb{C}$ cu următoarele proprietăţi:

i) $B(x,x) \geq 0$ *pentru orice* $x \in E$;

ii) $B(x,y) = \overline{B(y,x)}$ *pentru orice* $x, y \in E$;

iii) *Aplicaţia* B *este liniară în prima variabilă (şi antiliniară în a doua variabilă).*

Produsele hermitic care verifică şi proprietatea

$$B(x,x) = 0 \quad \text{implică} \quad x = 0$$

poartă numele de **produse scalare.**

Teorema 2. *Fie* E *un spaţiu vectorial peste corpul* $\mathbb{C}$ *înzestrat cu produsul hermitic* $B : E \times E \to \mathbb{C}$.

Atunci oricare ar fi elementele $v_1, ..., v_n \in E$, *matricea* A *de coeficienţi* $a_{ij} = B(v_i, v_j)$ *este pozitivă.*

În particular, determinantul ei (cunoscut în literatură ca determinantul Gram al familiei $v_1, ..., v_n$) este nenegativ.

Demonstraţie. Avem de demonstrat că

$$(Ax, x) = \sum_{i,j} a_{ij} a_i \overline{a_j} \geq 0 \quad \text{pentru orice } x = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} a_{ij} a_i \overline{a_j} &= \sum_{i,j} B(v_i, v_j) a_i \overline{a_j} \\ &= B\left(\sum a_i v_i, \sum a_i v_i\right) \geq 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

În cazul produselor scalare euclidiene, determinantul Gram este un indicator al liniar independenţei familiei pentru care este calculat. Anume, el este strict pozitiv pentru familiile liniar independente şi nul pentru familiile liniar dependente. Într-adevăr, presupunând că

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (v_{11}, ..., v_{1n}) \\ &\cdots \\ \mathbf{v}_n &= (v_{n1}, ..., v_{nn}) \end{aligned}$$

un calcul simplu ne arată că

$$\det\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & ... & \langle v_1, v_n\rangle \\ & ... & \\ \langle v_n, v_1\rangle & & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} v_{11} & ... & v_{1n} \\ & ... & \\ v_{n1} & & v_{nn} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} v_{11} & ... & v_{1n} \\ & ... & \\ v_{n1} & & v_{nn} \end{pmatrix}\right)$$
$$= \left|\det\begin{pmatrix} v_{11} & ... & v_{1n} \\ & ... & \\ v_{n1} & & v_{nn} \end{pmatrix}\right|^2.$$

Ce rezultate include Teorema 2?

În cazul spaţiului euclidian $\mathbb{C}^n$, considerând două elemente arbitrare u şi v din $\mathbb{C}^n$, urmează că

$$\det\begin{pmatrix} \langle u, u\rangle & \langle u, v\rangle \\ \langle v, u\rangle & \langle v, v\rangle \end{pmatrix} \geq 0 \tag{3}$$

cu egalitate numai dacă u şi v sunt liniar dependente. Or (3) reprezintă inegalitatea Cauchy-Schwarz

$$|\langle u, v\rangle|^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle,$$

care se poate extinde la cazul general al produselor hermitice, de aceeaşi manieră (nu şi cazul de egalitate).

Fie (X, Σ, μ) un spaţiu cu măsură finită; aceasta presupune că Σ este o $\sigma-$algebră de părţi ale lui X şi $\mu : \Sigma \to [0, \infty)$ este o măsură $\sigma-$ aditivă. Pe spaţiul $L^2(X, \Sigma, \mu)$ (al funcţiilor având pătratul modulului integrabil) se poate considera produsul hermitic

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mu)} = \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu$$

şi funcţionează concluzia Teoremei 2. Deoarece funcţia caracteristică χ_A a oricărei mulţimi $A \in \Sigma$ aparţine spaţiului $L^2(X, \Sigma, \mu)$, rezultă că pentru orice familie de mulţimi $A_1, ..., A_n$ din Σ, matricea de coeficienţi

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_X \chi_{A_i}(x)\overline{\chi_{A_j}(x)}\, d\mu \\ &= \int_X \chi_{A_i \cap A_j}(x)\, d\mu = \mu(A_i \cap A_j) \end{aligned}$$

este pozitivă.

Problema menţionată la începutul acestui articol constituie cazul particular când X este o mulţime finită, $\Sigma = \mathcal{P}(X)$, iar μ este măsura de cardinalitate a părţilor lui X. A se compara cu cazul câmpurilor clasice de probabilitate.

Produsele hermitice *nu* sunt neaparat ataşate spaţiilor cu măsură. Astfel, pe algebra $M_n(\mathbb{C})$ (algebră pe care este definită operaţia de adjuncţie) putem considera produsul hermitic

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{Trace} B^* A$$

şi, corespunzător, putem dispune de concluzia Teoremei 2. Inegalitatea Cauchy-Schwarz se citeşte în acest caz:

$$|\operatorname{Trace} B^* A|^2 \leq \operatorname{Trace} A^* A \cdot \operatorname{Trace} B^* B, \text{ pentru orice } A, B \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dorim în încheiere să ridicăm o problemă deschisă legată de generalizarea Teoremei 2.

$\mathbb{C}$ şi $M_n(\mathbb{C})$ constituie exemple de C^*- algebre. Vezi cartea lui R. Cristescu [1] pentru terminologie.

În Matematica avansată a timpurilor noastre se utilizează conceptul de pre- $\mathcal{A}-$modul Hilbertian pentru următoarea generalizare a spaţiilor cu produs hermitic. Vezi [5].

Fie $\mathcal{A}$ o C^*- algebră, cu norma $\|\cdot\|$.

Un *pre- $\mathcal{A}-$modul Hilbert* este un spaţiu vectorial complex E, care este un $\mathcal{A}-$modul (la dreapta) înzestrat cu o aplicaţie $<.,.>: E \times E \to \mathcal{A}$, care este liniară în prima variabilă şi satisface următoarele relaţii pentru orice $x, y \in E$ şi orice $b \in \mathcal{A}$:

i) $< x, x > \geq 0$

ii) $< x, y >^* = < y, x >$

iii) $< xa, y > = < x, y > a$.

Este uşor de văzut că înmulţirea cu scalari şi structura de $\mathcal{A}-$modul (la dreapta) a lui E sunt compatibile în sensul că

$$(\lambda x)a = \lambda(xa) = x(\lambda a)$$

pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in E$, $a \in \mathcal{A}$.

Orice C^*- algebră se poate privi ca un pre-modul Hilbert în raport cu produsul
$$< A, B >= B^* A.$$

Să observăm de asemenea că orice spaţiu vectorial complex înzestrat cu un produs hermitic constituie un pre- $\mathbb{C}-$module Hilbert pentru orice $x, y \in E$ şi orice $a \in \mathcal{A}$.

Care este analogul Teoremei 2 în cazul pre-modulelor Hilbert? Chiar şi chestiunea analogului inegalităţii Cauchy-Schwarz este deschisă în acest context. Într-o comunicare [6] la a XVII-a *Conferinţă de Teoria Operatorilor* de la Timişoara (22-26 iunie 1998) am propus următorul candidat al unei inegalităţi Cauchy-Schwarz generalizate:

$$|< x, y >| \leq \frac{1}{2} \left(u^* < x, x >^{1/2} u + v^* < y, y >^{1/2} v \right) \tag{4}$$

unde u şi v sunt elemente convenabile din $\mathcal{A}$ cu $||u|| \leq ||y||^{1/2}$ şi $||v|| \leq ||x||^{1/2}$.

Inegalitatea (4) este simplă în cazul algebrelor $\mathcal{A}$ comutative, dar cazul general pare dificil de soluţionat în acest moment

Bibliografie

1. R. Cristescu, *Analiză funcţională*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

2. C. Năstăsescu, C. Niţă, M. Brandiburu şi D. Joiţa, *Exerciţii şi probleme de algebră, clasele* IX- XII , Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

3. I. M. Gelfand, *Lecţii de algebră liniară*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1953.

4. I. M. Glazman şi Iu. I. Liubici, *Analiza liniară pe spaţii finit-dimensionale*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1980.

5.K. K. Jensen and K. Thomsen, *Elements of KK-theory*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1991.

6. C. P. Niculescu, *Converses of the Chauchy-Schwarz Inequality in the* C^**-framework*, Analele Univ. Craiova, 1999.

7. G. E. Şilov, *Analiză matematică. Spaţii finit dimensionale.* Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1983.

MATRIX POSITIVENESS CONSEQUENCES

Abstract. Starting with a proposed problem in [2] (Problem no. 35 in Chapter XVI) which asks to prove that the determinant of the matrix with where are finite sets, is positive, we announce and prove a more general result, using the framework of autoadjunct matrix spectral theory.

Primit: 20.10.2000

Universitatea din Craiova
Facultatea de Matematică şi Informatică
Str. A.I.Cuza 13, Craiova 1100
E-mail:tempus@oltenia.ro