Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 9(1999-2000), 105 - 108

# FUNCŢIA DE DISTRIBUŢIE A NUMERELOR PRIME

**Laurenţiu PANAITOPOL**

Pentru $x > 0$ notăm $\Pi(x)$ numărul numerelor prime $\leq x$. Avem deci:

$$\Pi(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ prim}}} 1$$

În studiul distribuţiei numerelor prime este esenţială cunoaşterea proprietăţilor funcţiei $\Pi$.

Primul matematician care a intuit comportarea lui $\Pi$ este Gauss. El vedea că $\Pi(x)$ este comparabilă cu $\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ ceea ce înseamnă

$$\Pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \tag{1}$$

adică $\lim_{x \to \infty} \frac{\Pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1.$

Acest rezultat este corect, însă demonstrarea lui s-a realizat peste aproape un secol. În 1808 Legendre a făcut conjectura

$$\Pi(x) = \frac{x}{\ln x - A(x)} \tag{2}$$

unde $\lim_{x \to \infty} A(x) = 1{,}08366\ldots$.

În realitate avem $\lim_{x \to \infty} A(x) = 1$, însă presupunerea făcută de Legendre este remarcabilă. Tabelele de numere prime existente, întocmite cu ajutorul calculatoarelor arată că numerele pentru care Legendre a făcut verificări ajungeau până în jurul lui $10^6$ şi aceasta în condiţiile de acum 200 de ani! Primul care se apropie de obţinerea relaţiei (1) este matematicianul rus P. Cebâşev, care a arătat în 1852 că:

$$0{,}89 \frac{x}{\ln x} < \Pi(x) < 1{,}11 \frac{x}{\ln x}$$

pentru x suficient de mare.

Demonstrația relației (1) vine în 1896 și este obținută independent de către Jacques Hadamard și Charles de la Vallé Poussin.

După aceea s-au publicat și alte demonstrații, dintre care unele sunt elementare, însă deosebit de dificile. În 1962, J.B. Rosser și L. Schvenfeld au arătat că

(3) $$\frac{x}{\ln x - \frac{1}{2}} < \Pi(x) < \frac{x}{\ln x - \frac{3}{2}}$$

De curând s-a demonstrat că

(4) $$\Pi(x) < \frac{x}{\ln x - 1{,}11} \text{ pentru } x \geq 4$$

și

(5) $$\Pi(x) > \frac{x}{\ln x - \frac{28}{29}} \text{ pentru } x \geq 3299 .$$

Aceste inegalități permit aproximarea lui $\Pi(x)$ dar nu și calcularea sa.

S-a pus, desigur, problema obținerii unor formule pentru $\Pi(x)$ și s-au obținut câteva rezultate însă, din păcate, ele nu au valoare practică. W. Sierpinski a arătat că pentru $x \geq 3$ avem

(6) $$\Pi(x) = 1 + \sum_{n=3}^{[x]} \left( 1 - \lim_{m\to\infty} \left( 1 - \prod_{k=2}^{n-1} \sin^2 \frac{n\pi}{k} \right)^m \right)$$

O altă formulă care nu face apel la calcularea unor limite însă utilizează partea întreagă este următoarea

(7) $$\Pi(x) = -1 + \sum_{k=3}^{[x]} \left( (k-2)! - k\left[ \frac{(k-2)!}{k} \right] \right)$$

În continuare vom da o formulă inspirată din cea a lui Sierpinski. Vom demonstra mai întâi următoarea lemă.

**Lemă.** Pentru $n \geq 3$ număr prim, numerele $P_n = \prod_{k=2}^{n-1} \sin \frac{n\pi}{k}$ și $(-1)^{[\sqrt{n}]}$ au același semn.

**Demonstrație.** Avem $\frac{n\pi}{k} = \left[ \frac{n}{k} \right]\pi + \left\{ \frac{n}{k} \right\}\pi$ și $\sin(h\pi + a) = (-1)^h \sin a$ unde $h \in \mathbb{Z}$.

Notând $S_n = \sum_{k=2}^{n-1}\left[\frac{n}{k}\right]$ rezultă $P_n = (-1)^{S_n}\prod_{k=2}^{n-1}\sin\left\{\frac{n}{k}\right\}\pi$. Cum $\left\{\frac{n}{k}\right\}\pi \in (0,\pi)$ şi deci $\sin\left\{\frac{n}{k}\right\}\pi > 0$ rezultă că $P_n$ şi $(-1)^{S_n}$ au acelaşi semn.

Se notează $\tau(k)$ numărul divizorilor naturali ai lui k. Este cunoscută relaţia

$$\sum_{k=1}^{n}\tau(k) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]$$

din care rezultă

(8) $$S_n = \sum_{k=4}^{n}\tau(k) + 4 - n$$

Deoarece pentru $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ avem

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^{k}(1+\alpha_i)$$

rezultă că $\tau(n)$ este impar dacă şi numai dacă n este pătrat perfect şi din (8) obţinem

$$\begin{aligned} S_n &\equiv \tau(2^2) + \tau(3^2) + \ldots + \tau\left(\left[\sqrt{n}\right]^2\right) - n \pmod 2 \\ &\equiv \left[\sqrt{n}\right] - 1 - n \pmod 2 \end{aligned}$$

Pentru $n$ prim, $n \geq 3$ avem

(9) $$S_n \equiv \left[\sqrt{n}\right] \pmod 2$$

şi deci $(-1)^{S_n}$ şi $(-1)^{[\sqrt{n}]}$ au acelaşi semn, ceea ce încheie demonstraţia lemei.

**Propoziţie.** Pentru $x \geq 3$ avem:

$$\Pi(x) = 1 - \sum_{n=3}^{[x]}\left[(-1)^{[\sqrt{n}]+1}P_n\right]$$

unde $P_n = \prod_{k=2}^{n-1}\sin\frac{n\pi}{k}$

**Demonstraţie.** Pentru n compus avem $P_n = 0$ şi deci $\left[(-1)^{[\sqrt{n}]+1}P_n\right] = 0$. Pentru n prim impar avem $1 > (-1)^{[\sqrt{n}]}P_n > 0$ şi deci $\left[(-1)^{[\sqrt{n}]+1}P_n\right] = -1$.

## Bibliografie


[1] **Hadamard J.**, Sur la distribution des zeros de la fonction $\xi(s)$ et ses consequénces aritmetiques, Bulletin de la Soc.Math. de France 24, 1856, 199-220

[2] **Panaitopol L.**, Several approximations of $\Pi(x)$, Mathematical Inequalities Applications, Volume 2, No.3, 1999, 317-324

[3] **Poussin Ch. J.**, Recherches analytique sur le théorie des nombres. Ann de la Soc.Sci de Bruxelles, 202, 1896

[4] **Rosser J. B., Schvenfeld L.**, Approximate formulas for some functions of prime numbers, Illinois J.Math. 6, 1962, 64-94.

[5] **Sierpinski W.**, Sur une propriete des nombres premiers, Bull. Soc. Roy. Liege 21, 1952, 537-539

[6] **Tchébychev P.L.**, Sur le fonction qui determine la totalité des nombres premiers inférieurs á une limite donneé, Journal de math. (1), 17, 1852.


## ABOUT THE DISTRIBUTION FUNCTION OF THE PRIME NUMBERS


**Abstract.** In this article we establish a new formula for $\Pi(x) = \sum_{\substack{p<x \\ p \ \text{prime}}} 1$, the number of primes not greater then x:

$$\Pi(x) = 1 - \sum_{n=3}^{[x]} \left[ (-1)^{[\sqrt{n}]+1} \cdot P_n \right] \qquad (x \geq 3)$$

where $P_n = \prod_{k=2}^{n-1} \sin \frac{n\pi}{k}$ and [ ] denotes integer part.



Primit: 18.10.2000



Universitatea Bucureşti
Facultatea de Matematică
Str. Academiei 14, Bucureşti