Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 9 (1999-2000), 109 - 112

O APLICAȚIE A INEGALITĂȚII LUI ABEL

Maria Elena PANAITOPOL, Laurențiu PANAITOPOL

La un concurs din 1983, Dorin Andrica a propus problema:

Pentru $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ are loc inegalitatea:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

De curând, Gheorghe Berinde și Claudiu Chindriș au publicat în [1] o demonstrație și câteva observații asupra acestei inegalități. Vom da în continuare un rezultat mai general utilizând o celebră teoremă.

Inegalitatea lui Abel

Dacă $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq x_n \geq 0$ și

$y_1 \geq 0,\ y_1 + y_2 \geq 0,\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 0, \ldots,\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n \geq 0$

atunci avem $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geq 0.$

Propoziție. Dacă $\alpha, \beta, a_1, a_2, \dots a_n$ sunt numere pozitive și $\alpha \geq \beta$, $a_1 a_2 a_3 \dots a_n \geq 1$ atunci avem $\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k^{\beta}$.

Demonstrație. Fără a micșora generalitatea vom presupune $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$. Notăm $A_k = \ln a_k, k \in \overline{1,n}$ și rezultă imediat că $A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq \dots \geq A_n$ și deci

$$A_1 \geq \frac{A_1 + A_2}{2} \geq \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3} \geq \dots \geq \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n} \geq 0$$

Așadar pentru $1 \leq k \leq n$ avem $A_1 + A_2 + \dots + A_k \geq 0$ adică $a_1 a_2 \dots a_k \geq 1$. Din inegalitatea mediilor rezultă

$$\frac{a_1^{\alpha-\beta} + a_2^{\alpha-\beta} + \dots + a_k^{\alpha-\beta}}{k} \geq \sqrt[k]{(a_1 a_2 \dots a_k)^{\alpha-\beta}} \geq 1 \text{ și deci}$$

$$a_1^{\alpha-\beta} + a_2^{\alpha-\beta} + \dots + a_k^{\alpha-\beta} \geq k$$

Notăm $y_k = a_k^{\alpha-\beta} - 1$ și $x_k = a_k^{\beta}$, $1 \leq k \leq n$.

Avem $\sum_{k=1}^{i} y_k \geq 0$ pentru orice $1 \leq i \leq n$.

Deoarece $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ aplicăm inegalitatea lui Abel și rezultă

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{\beta}\left(a_k^{\alpha-\beta} - 1\right) \geq 0, \text{ adică } \sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha_k} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k^{\beta_k}.$$

Cazuri particulare.

1). Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ și $a_1 a_2 \dots a_n \geq 1$ rezultă

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geq \sum_{k=1}^{n} a_k$$

În propoziția demonstrată alegem $\alpha = 1$ și $\beta = 1$.

2). Dacă $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt numere reale cu $\left|b_1 b_2 \ldots b_n\right| \geq 1$ atunci $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geq \sum_{k=1}^{n} b_k$.

Este suficient să notăm $a_k = \left|b_k\right|$ și să observăm că $\sum_{k=1}^{n}\left|b_k\right| \geq \sum_{k=1}^{n} b_k$ și din inegalitatea precedentă rezultă enunțul.

3). Pentru $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ notăm $b_1 = \frac{x}{y}$, $b_2 = \frac{y}{z}$ și $b_3 = \frac{z}{x}$ și aplicând 2) obținem inegalitatea lui Dorin Andrica.

4). Pentru $c_1, c_2, \cdots, c_n > 0$ notăm $G = \sqrt[n]{c_1 c_2 \ldots c_n}$ și dacă $\alpha \geq \beta \geq 0$ atunci

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} c_k^{\alpha}}{\sum_{k=1}^{n} c_k^{\beta}} \geq G^{\alpha-\beta} \geq \frac{\sum_{k=1}^{n} c_k^{-\beta}}{\sum_{k=1}^{n} c_k^{-\alpha}}.$$

Pentru demonstrație notăm $a_k = \frac{c_k}{G}$ și avem $\prod_{k=1}^{n} a_k = 1$. Din propoziția demonstrată avem

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} c_k^{\alpha}}{G^{\alpha}} \geq \frac{\sum_{k=1}^{n} c_k^{\beta}}{G^{\beta}} \text{ adică } \frac{\sum_{k=1}^{n} c_k^{\alpha}}{\sum_{k=1}^{n} c_k^{\beta}} \geq G^{\alpha-\beta}.$$

Înlocuind c_k cu c_k^{-1} în această inegalitate obținem

$$G^{\alpha-\beta} \geq \frac{\sum_{k=1}^{n} c_k^{-\beta}}{\sum_{k=1}^{n} c_k^{-\alpha}}.$$

În final facem observația că în acest mod am regăsit și inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^{\alpha}} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k^{\beta} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^{\beta}}$$

dacă $\alpha \geq \beta$ și $a_k > 0$ pentru $1 \leq k \leq n$.

Bibliografie

1. **Berinde G., Chindriş C.,** Asupra unor probleme din Gazeta Matematică; Lucrările Seminarului de Creativitate Matematică, Vol.8 (1998-1999), pag.25-28, Baia Mare 1999.

AN APPLICATION OF ABEL'S INEQUALITY

Abstract. In this note, using an inequality of Abel, we give the following inequality for $\alpha, \beta, a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive numbers with $\alpha \geq \beta$ and $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k^{\beta}.$$

Then we discuss four important particular cases.

Primit: 20.10.2000

Colegiul Naţional "Spiru Haret"
Str. Italiană 17, Bucureşti

Universitatea Bucureşti
Facultatea de Matematică
Str. Academiei 14,
70109 Bucureşti