Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 9(1999-2000), 121 - 126

PODARA HIPERBOLEI

Camelia-Mihaela PINTEA şi Cornel-Sebastian PINTEA

In lucrarea [2] am definit *locul geometric asociat unei hipersuprafeţe* a lui $\mathbb{R}^n$ ca fiind mulţimea proiecţiilor ortogonale ale unui punct fixat al spaţiului ambiant $\mathbb{R}^n$pe hiperplanele sale tangente. Pentru cazul unei curbe plane, adică n=2, locul geometric asociat poartă numele de *podara curbei* date (vezi de exemplu [3], pag. 123). În această lucrare ne propunem să determinăm ecuaţia podarei hiperbolei şi să o reprezentăm grafic.

Considerăm planul π raportat la reperul cartezian ortonormat $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Presupunând că acesta este reperul faţă de care hiperbola $H_{(a,b)}$ are ecuaţia redusă rezultă că aceasta este de forma,

$$H_{(a,b)} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1. Propoziţie *Podara hiperbolei* $H_{(a,b)} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *este mulţimea*

$$\mathcal{L}_{H_{(a,b)}} = \{M(x,y) \in \pi \,|\, (x^2+y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2\} \setminus \{O(0,0)\}$$

Demonstraţie. Fie $M_0(x_0, y_0) \in H_{(a,b)}$. Ecuaţia tangentei $T_{M_0}(H_{(a,b)})$ în M_0 la $H_{(a,b)}$ este $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$ iar ecuaţiile perpendicularei din $O(0,0)$ pe $T_{M_0}(H_{(a,b)})$ sunt

$$\begin{cases} x(t) = \frac{x_0}{a^2}t \\ y(t) = -\frac{y_0}{a^2}t. \end{cases}$$

Înlocuind $x(t)$, $y(t)$ în ecuaţia lui $T_{M_0}(H_{(a,b)})$ obţinem soluţia

$$t_0 = \frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}$$

şi deci coordonatele proiecţiei ortogonale ale lui O pe $T_{M_0}H_{(a,b)}$ sunt

$$\begin{cases} x = \frac{x_0}{a^2} \cdot t_0 \\ y = -\frac{y_0}{b^2} \cdot t_0. \end{cases}$$

Pentru a elimina pe x_0 şi y_0 din relaţiile de mai sus observăm că

$$x^2 + y^2 = \frac{x_0^2}{a^4} \cdot t_0^2 + \frac{y_0^2}{b^4} \cdot t_0^2 = t_0 \text{ şi } a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{x_0^2}{a^2} \cdot t_0^2 + \frac{y_0^2}{b^2} \cdot t_0^2 = t_0^2.$$

Prin urmare $(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$, adică podara lui $H_{(a,b)}$ este conţinut în $\mathcal{L}_{H_{(a,b)}}$.

Fie acum $M_1(x_1, y_1) \in \mathcal{L}_{H_{(a,b)}}$, adică $(x_1, y_1) \neq (0,0)$ şi $(x_1^2 + y_1^2)^2 = a^2x_1^2 - b^2y_1^2$. Este uşor de verificat că punctul

$$M\Big(\frac{a^2x_1}{x_1^2+y_1^2}, -\frac{b^2y_1}{x_1^2+y_1^2}\Big)$$

aparţine hiperbolei $H_{(a,b)}$ şi că M_1 este proiecţia ortogonală a lui O pe tangenta hiperbolei $H_{(a,b)}$ în M, adică M_1 aparţine podarei hiperbolei $H_{(a,b)}$ şi astfel egalitatea afirmată este complet demonstrată.

2. Observaţie (i) Podara hiperbolei echilaterale $H_{(a,a)}$ este lemniscata lui Bernoulli (L) $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ fără originea $O(0,0)$.

(ii) Podara $\mathcal{L}_{H_{(a,b)}}$ a hiperbolei $H_{(a,b)} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ este o curbă regulară plană.

Într-adevăr, mulţimea $\mathcal{L}_{H_{(a,b)}}$ se identifică în mod natural cu mulţimea $\varphi^{-1}(1)$ unde

$$\varphi : \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbf{R}, \ \varphi(x,y) = \frac{a^2x^2 - b^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Observăm că $\varphi(tx, ty) = t^{-2}\varphi(x,y)$, $\forall\, t \in \mathbf{R}$ şi $\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, adică φ este omogenă de ordin -2 şi deci 1 este valoare regulară a lui φ. Prin urmare $\mathcal{L}_{H_{(a,b)}} = \varphi^{-1}(1)$ este o curbă regulară plană.

Pentru a găsi o parametrizare a curbei $\mathcal{L}_{H_{(a,b)}}$ folosim coordonatele polare (ρ, θ) care sunt legate de cele carteziene prin relaţiile

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

şi care înlocuite în ecuaţia $(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$ a podarei hiperbolei $H_{(a,b)}$ conduc la relaţia $\rho^2 = \rho^2(\theta) = a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta$. Domeniul de variaţie al unghiului θ îl determinăm din condiţia $\rho(\theta) > 0$ deoarece $(0,0) \not\in \mathcal{L}_{H_{(a,b)}}$. Aceasta ne conduce la concluzia că $tg^2\theta < \frac{a^2}{b^2}$, adică $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}}(-arctg\frac{a}{b} + k\pi, arctg\frac{a}{b} + k\pi)$. Făcând notaţiile $\alpha_k = -arctg\frac{a}{b} + k\pi$, $\beta_k = arctg\frac{a}{b} + k\pi$, observăm că $\lim_{\substack{\theta\to\alpha_k\\ \theta>\alpha_k}} \rho(\theta) = \lim_{\substack{\theta\to\beta_k\\ \theta<\beta_k}} \rho(\theta) = 0$, adică originea $O(0,0)$ este punct de acumulare al podarei hiperbolei.

Deci o parametrizare a curbei $\mathcal{L}_{H_{(a,b)}}$ este

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta, \end{cases} \qquad \text{sau, echivalent } r(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta),$$

iar ecuaţia sa vectorială este $\vec{r} = \rho(\theta)\cos\theta\vec{i} + \rho(\theta)\sin\theta\vec{j}$. Deoarece

$$\rho'(\theta) = -\sin\theta\cos\theta\frac{a^2+b^2}{\rho(\theta)}$$

rezultă că

$$\frac{\rho(\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\vec{r}'(\theta) = -(a^2+b^2)\cos\theta\vec{i} - (a^2+b^2)\sin\theta\vec{j} + \rho^2(\theta)[\frac{\vec{j}}{\sin\theta} - \frac{\vec{i}}{\cos\theta}]$$

este un vector director al tagentei lui r în $r(\theta)$.

Folosind formulele

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} \text{ şi } \sin\alpha = \pm\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}},$$

deducem că

$$\cos\alpha_k = \cos(arctg(-\frac{a}{b}) + k\pi) = \cos(arctg(-\frac{a}{b})\cos k\pi = (-1)^k\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

şi

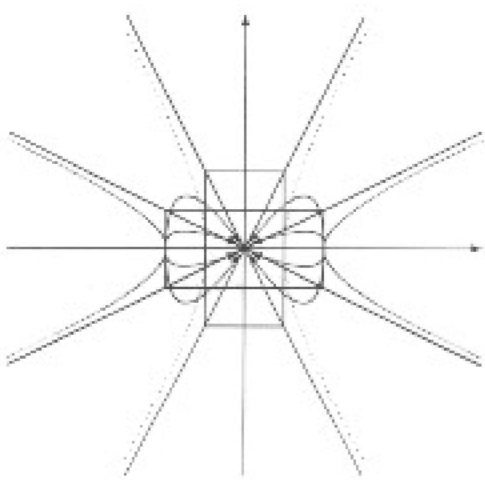
$$\sin\alpha_k = \cos(arctg(-\frac{a}{b}) + k\pi) = \sin(arctg(-\frac{a}{b})\cos k\pi = (-1)^{k+1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Prin urmare poziţia limită a vectorului $\frac{\rho(\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\vec{r}'(\theta)$, atunci când $\theta \to \alpha_k$ este $(-1)^k\sqrt{a^2+b^2}[-b\vec{i} + a\vec{j}]$ şi analog poziţia sa limită atunci când $\theta \to \beta_k$ este $(-1)^{k+1}\sqrt{a^2+b^2}[b\vec{i} + a\vec{j}]$, adică poziţiile limită ale tangentei lui r în $r(\theta)$, atunci când θ tinde spre limitele intervalelor de forma (α_k, β_k) sunt vectori directori ai asimptotelor hiperbolei $H_{(b,a)}$.

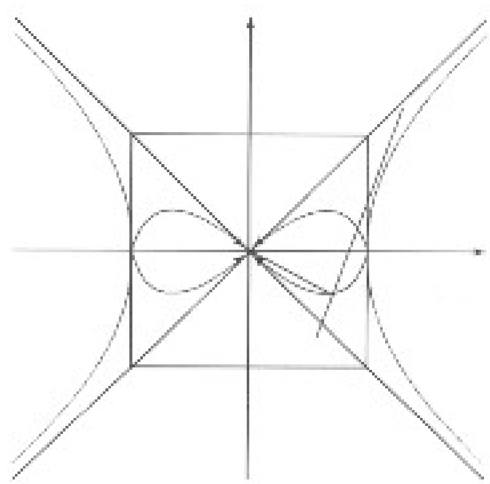
3. Program pentru reprezentarea grafică a podarei hiperbolei

```
    program LocGeometricHiperbola;
uses Graph;
var x,y,x1,y1,a,b,t:longint; culoare,Gd,i,Gm: Integer;
begin gd := Detect; InitGraph(Gd, Gm,'');
    if GraphResult<>grOk then Halt(1); Setbkcolor(white);
AXE
for x:=-150 to 150 do
begin
    putpixel(300+x,200,9); putpixel(300-x,200,9);
    MoveTo(350,200);SetTextStyle(DefaultFont, HorizDir, 1);
    SetTextJustify(LeftText, TopText);outtext('>');
    putpixel(300,200-x,9); putpixel(300,200+x,9); MoveTo(100,100);
    SetTextStyle(DefaultFont, HorizDir, 1);
    SetTextJustify(LeftText, TopText);
    end;
    a:=40; b:=70; culoare:=13;
HIPERBOLA
for y:=-100 to 100 do
begin x:=trunc(a* sqrt( 1+(y*y) / (b*b) ) );
    putpixel(300+x,200-y,culoare); putpixel(300-x,200-y,culoare);
    putpixel(300-x,200+y,culoare); putpixel(300+x,200+y,culoare);
end;
ASIMPTOTE
for x:=-60 to 60 do
begin y:=trunc(b*x/a);
    putpixel(300+x,200-y,culoare); putpixel(300-x,200-y,culoare);
    putpixel(300-x,200+y,culoare); putpixel(300+x,200+y,culoare);
end;
LOC GEOMETRIC
for x:=0 to a do
begin y:=trunc( 0.5*sqrt (sqrt (4*(b*b+a*a)*x*x+b*b*b*b )-2*x*x-b*b ) );
    putpixel(300+x,200-y,culoare); putpixel(300-x,200-y,culoare);
    putpixel(300-x,200+y,culoare); putpixel(300+x,200+y,culoare);
end;
HIPERBOLA INVERSA
    a:=70; b:=40; culoare:=17;
for y:=-50 to 50 do
begin x:=trunc(a* sqrt( 1+(y*y) / (b*b) ) );
    putpixel(300+x,200-y,culoare); putpixel(300-x,200-y,culoare);
    putpixel(300-x,200+y,culoare); putpixel(300+x,200+y,culoare);
end;
```

```
ASIMPTOTE
for x:=-100 to 100 do
begin y:=trunc(b*x/a);
    putpixel(300+x,200-y,culoare); putpixel(300-x,200-y,culoare);
    putpixel(300-x,200+y,culoare); putpixel(300+x,200+y,culoare);
end;
LOC GEOMETRIC
for x:=0 to a do
begin y:=trunc( 0.5*sqrt (sqrt (4*(b*b+a*a)*x*x+b*b*b*b )-2*x*x-b*b ) );
    putpixel(300+x,200-y,culoare); putpixel(300-x,200-y,culoare);
    putpixel(300-x,200+y,culoare); putpixel(300+x,200+y,culoare);
end;
    Readln; CloseGraph;
end.
```



Hiperbolele $H_{(a,b)}$ şi $H_{(b,a)}$ şi podarele lor



Hiperbola echilaterală $H_{(a,a)}$ şi podara sa

Bibliografie

1. Gheorghiev, Gh., Oproiu, V., Geometrie diferenţială, Editura didactică şi pedagogică-Bucureşti, 1977.

2. Pintea, C *The associated locus of a hypersurface in* $\mathbb{R}^n$, (va apare)

3. Mihăileanu, N., Istoria Matematicii, vol 2, Ed. Ştiinţificăşi Enciclopedică, Bucureşti, 1981.

4. Vlada, M., Posea, A., Nistor, I., Constantinescu, C., Grafica pe calculator în limbajele Pascal şi C

ON A GEOMETRIC LOCUS RELATED TO THE HYPERBOLA

Abstract. In this paper we are going to find the equation of a geometric locus related to the hyperbola and also we will represent this locus using a computer.

Primit: 2010.2000

Camelia-Mihaela Pintea
Liceul Gheorghe Lazăr
Baia-Mare

Cornel-Sebastian Pintea
Universitatea Babeş-Bolyai
Cluj-Napoca
E-mail: cpintea@math.ubbcluj.ro