Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 9(1999-2000), 127 - 134

ASUPRA UNEI TEOREME A LUI VOLTERRA PRIVIND FUNCŢIILE CONTINUE

Aurora RĂDULESCU

O bună parte dintre noţiunile analizei matematice se bazează pe posibilitatea măsurării distanţei dintre puncte. La începutul secolului al XX-lea, întreaga evoluţie anterioară a analizei a permis introducerea şi dezvoltarea puternică a teoriei spaţiilor metrice, ale cărei noţiuni fundamentale au fost formulate în 1906 în [4] de către matematicianul francez M. Fréchet. Conform Dieudonné [2], "pentru a desprinde proprietăţile legate de obiectele studiate, Frechet a avut ideea genială de a nu specifica neapărat natura acestor obiecte, ci de a studia o anumită mulţime, pe care este definită o funcţie *distanţă* între două elemente arbitrare, cu valori nenegative şi verificând trei dintre proprietăţile clasice ale distanţei euclidiene."

O mulţime E se numeşte *spaţiu metric* dacă fiecărei perechi de elemente $x, y \in E$ i s-a asociat un număr real $d(x, y)$ astfel încât sunt îndeplinite condiţiile:

1) $d(x, y) \geq 0$ pentru orice $x, y \in E$ şi $d(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in E$ (proprietatea de simetrie);
3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pentru orice $x, y, z \in E$ (inegalitatea triunghiului).

Funcţia $d : E \times E \to \mathbf{R}$ se numeşte *metrică*, iar $d(x, y)$ semnifică *distanţa* între punctele x şi y.

Exemple: (i) Orice mulţime E de pe axa reală $\mathbf{R}$ este un spaţiu metric în raport cu distanţa $d(x, y) = |x - y|$. In mod analog, orice submulţime E a spaţiului euclidian $\mathbf{R}^n$ poate fi privită ca spaţiu metric înzestrat cu "metrica euclidiană"

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\,,$$

unde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$.

(ii) Cercul

$$S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

este un spaţiu metric, distanţa dintre două puncte fiind cea mai mică dintre lungimile arcelor determinate de cele două puncte de pe cerc.

Majoritatea mulţimilor de funcţii întâlnite în problemele de analiză pot fi înzestrate cu "distanţe" definite în concordanţă cu problemele studiate. De pildă, mulţimea $C[0, 1]$ a tuturor funcţiilor continue $u : [0, 1] \to \mathbf{R}$ este un spaţiu metric, distanţa dintre funcţiile u şi v fiind definită prin

$$d(u, v) = \max_{t \in [0,1]} |u(t) - v(t)|\,. \tag{1}$$

In lucrările legate de problemele de tip Sturm-Liouville

sau în studiile de teoria probabilităţilor este mai utilă metrica

$$d(u, v) = \left(\int_0^1 |u(t) - v(t)|^2 dt\right)^{1/2},$$

care defineşte un alt spaţiu funcţional deosebit de important, notat cu $L^2(0, 1)$.

Remarcăm că **orice** mulţime poate fi privită ca spaţiu metric în raport cu *metrica trivială*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \neq y \\ 0, & \text{dacă } x = y\,. \end{cases}$$

Dacă (E, d) este un spaţiu metric, se numeşte *bilă deschisă* de rază $r > 0$ şi centru $x_0 \in E$ mulţimea

$$B(x_0, r) = \{x \in E; d(x, x_0) < r\}.$$

Noţinea corespunzătoare de *bilă închisă* $\overline{B}(x_0, r)$ de rază $r > 0$ şi centru x_0 se obţine înlocuind în definiţia bilei deschise relaţia "$<$" cu "$\leq$". O mulţime $A \subset E$ este *deschisă* dacă pentru orice $x_0 \in A$ există o bilă deschisă centrată în x_0 şi conţinută în A. O mulţime $A \subset E$ este *închisă* dacă complementara sa este deschisă.

O mulţime A dintr-un spaţiu metric (E, d) se numeşte *densă* dacă orice bilă deschisă centrată într-un punct din E conţine cel puţin un punct din A. De pildă, mulţimea numerelor raţionale este densă în mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale, iar mulţimea $(r_1, \cdots, r_n)$ a punctelor de coordonate raţionale este densă în spaţiul euclidian n-dimensional.

Noţiunile fundamentale de convergenţă, continuitate, etc., stabilite pentru axa reală, se transpun corespunzător în contextul mai general al spaţiilor metrice. Vom reaminti doar definiţiile şi proprietăţile de care vom avea nevoie în vederea enunţării şi demonstrării rezultatului principal al acestei note. Pentru mai multe detalii legate de noţiunile prezentate recomandăm recenta monografie [5].

Fie (E, d) un spaţiu metric. Un şir (x_n) de puncte din E se numeşte *convergent* către un punct $x \in E$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural N_ε astfel încât pentru orice $n \geq N_\varepsilon$ are loc inegalitatea $d(x, x_n) \leq \varepsilon$. Dacă (E, d_1) şi (F, d_2) sunt spaţii metrice, atunci o funcţie $u : E \to F$ se numeşte *continuă în punctul* $x_0 \in E$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât din condiţia $d_1(x, x_0) < \delta$ să rezulte $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. O funcţie continuă în orice punct din E se numeşte *continuă pe* E. Una dintre cele mai simple funcţii continue este aplicaţia $u : E \to \mathbf{R}$ definită prin $u(x) = d(x, x_0)$, unde (E, d) este un spaţiu metric şi $x_0 \in E$. Acest lucru rezultă cu uşurinţă din inegalitatea triunghiului.

Şirul (x_n) din spaţiul metric (E, d) se numeşte *şir fundamental* (*şir Cauchy*) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural N_ε astfel încât pentru orice

$n \geq N_\varepsilon$ şi $m \geq N_\varepsilon$ are loc inegalitatea $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$. Folosind inegalitatea triunghiului, deducem că orice şir convergent este un şir fundamental. Reciproca acestei proprietăţi nu este adevărată. Intr-adevăr, fie mulţimea $E = (0,1)$ înzestrată cu metrica uzuală a axei reale. In acest spaţiu metric, şirul $x_n = \frac{1}{n+1}$ $(n \geq 1)$ este un şir fundamental care nu este convergent. Acest exemplu impune introducerea următoarei clase importante de spaţii metrice. Un spaţiu metric (E,d) se numeşte *complet* dacă orice şir fundamental din E este convergent către un element din E. Spaţiile metrice complete sunt caracterizate de următoarea *proprietate a bilelor închise*, cunoscută sub numele de *principiul lui Cantor*: un spaţiu metric este complet dacă şi numai dacă orice şir descendent de bile închise nevide, de diametru tinzând către zero, are un punct comun.

O proprietate foarte interesantă a spaţiilor metrice complete, cu implicaţii profunde în multe direcţii, este o teoremă demonstrată independent în 1898 de Osgood pentru axa reală şi în 1899 de către Baire [1] pentru $\mathbf{R}^n$: dacă (E,d) este un spaţiu metric complet şi (U_n) este un şir de mulţimi deschise şi dense în E, atunci intersecţia lor este, de asemenea, densă în E. In contextul general al spaţiilor metrice complete, această proprietate este cunoscută sub numele de *lema lui Baire*. O frumoasă aplicaţie a acestui rezultat a fost găsită în 1931 de către Banach, care a arătat că "majoritatea" funcţiilor continue $u : [0,1] \to \mathbf{R}$ nu au derivată la dreapta în **nici** un punct. Intr-adevăr, observăm că mulţimea $C[0,1]$ devine un spaţiu metric complet în raport cu distanţa definită în relaţia (1). Pentru orice întreg $n \geq 1$, fie F_n mulţimea funcţiilor $u : [0,1] \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că există x (care depinde de u) astfel încât

$$0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \text{şi} \qquad |u(x') - u(x)| \leq n(x' - x),\ \forall x \leq x' \leq x + \frac{1}{n+1}.$$

Mulţimea F_n este închisă în $C[0,1]$, deci complementara sa U_n este deschisă. In plus, mulţimea U_n este densă. Aceasta rezultă din faptul că pentru orice $u \in C[0,1]$ şi pentru orice $M > 0$ şi $\varepsilon > 0$, există o funcţie $v \in C[0,1]$ astfel încât $d(u,v) < \varepsilon$, iar derivata la dreapta a lui v există în orice punct şi este cel puţin M în valoare absolută. Pentru aceasta e suficient să luăm o curbă tip *dinţi de fierăstrău*, al cărei grafic este situat într-o bandă de lăţime ε în jurul graficului lui u, iar numărul de "dinţi" să fie suficient de mare astfel încât fiecare segment ce compune graficul să aibă o pantă mai mare ca M

sau mai mică decât $-M$. Conform lemei lui Baire, mulţimea $U = \bigcap_{n\geq 1} U_n$ este densă în $C[0,1]$. Folosind acum definiţia mulţimilor F_n, rezultă că orice funcţie $u \in U$ nu poate avea derivată la dreapta finită în nici un punct din intervalul $[0,1]$.

In 1881 Volterra a demonstrat un rezultat in aceeaşi direcţie ca acela al lui Baire şi Osgood. Mai precis, Volterra a arătat că dacă două funcţii definite pe $\mathbf{R}$ cu valori reale sunt continue pe submulţimi dense ale lui $\mathbf{R}$, atunci mulţimea punctelor comune de continuitate este densă în $\mathbf{R}$. Acest rezultat a fost publicat în [7], iar demonstraţia sa este reamintită în [3]. Scopul acestei note este de a prezenta o generalizare a rezultatului lui Volterra în contextul spaţiilor metrice complete, arătând în plus că *mulţimea punctelor comune de continuitate nu este numărabilă.* In particular, o funcţie $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nu poate fi continuă **doar** în punctele raţionale. Mai precis, vom demonstra următorul rezultat.

Teoremă. *Fie (E, d_1) un spaţiu metric complet şi (F, d_2) un spaţiu metric. Fie două aplicaţii $u, v : E \to F$. Notăm cu C_u şi C_v mulţimile punctelor de continuitate ale lui u şi v şi presupunem că aceste mulţimi sunt dense în E. Atunci $C_u \cap C_v$ este o mulţime densă în E. In plus, dacă E nu este o mulţime numărabilă, atunci $C_u \cap C_v$ este nenumărabilă.*

O condiţie suficientă ca un spaţiu metric complet (E, d) să nu fie numărabil (a se vedea Şilov [6]) este ca mulţimea E să fie fără puncte izolate. Reamintim că un punct x_0 se numeşte *izolat* dacă există o bilă centrată în x_0 care să nu conţină nici un punct al mulţimii E diferit de x_0. Rezultatul de mai sus afirmă în particular că dacă mulţimea punctelor de continuitate ale unei funcţii $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este **densă** în $\mathbf{R}$, atunci această mulţime **nu** este numărabilă. Gândul ne poartă aici către funcţia lui Riemann

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \not\in \mathbf{Q} \\ \dfrac{1}{q}, & \text{dacă } x = \dfrac{p}{q},\ p, q \in \mathbf{Z},\ q > 0,\ (p,q) = 1, \end{cases}$$

care este continuă pe mulţimea numerelor iraţionale.

Demonstraţia teoremei. Fie $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots\}$ o submulţime numărabilă arbitrară a lui E. Observăm că, pentru a încheia demonstraţia, este suficient să arătăm ca

$$B(a,r) \cap C_u \cap C_v \setminus C \neq \emptyset, \tag{2}$$

pentru orice $a \in E$ şi orice $r > 0$, unde $B(a,r)$ semnifică bila deschisă din E cu centrul a şi de rază r. Intr-adevăr, dacă (2) este îndeplinită, atunci $B(a,r) \cap C_u \cap C_v \neq \emptyset$, deci $C_u \cap C_v$ este o submulţime densă a lui E. Relaţia (2) implică şi faptul că mulţimea $C_u \cap C_v$ nu este numărabilă. Intr-adevăr, presupunând contrariul, putem alege $C = C_u \cap C_v$, deci $B(a,r) \cap C_u \cap C_v \setminus C = \emptyset$, ceea ce contrazice (2).

Pentru $a \in E$ şi $r > 0$ fixaţi, fie $a_0 = a$ şi $r_0 = r$. Definim inductiv şirurile $(a_n)_{n \geq 0} \subset E$ şi $(r_n)_{n \geq 0} \subset \mathbf{R}_+$ cu următoarele proprietăţi:

(i) $\overline{B}(a_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(a_n, r_n)$, pentru orice $n \geq 0$;

(ii) $c_n \notin B(a_n, r_n)$, pentru orice $n \geq 1$;

(iii) dacă n este impar, atunci $d_2(u(x), u(y)) < 1/n$, pentru orice $x, y \in B(a_n, r_n)$;

(iv) dacă $n \geq 2$ este par, atunci $d_2(v(x), v(y)) < 1/n$, pentru orice $x, y \in B(a_n, r_n)$.

Aceste şiruri sunt construite astfel: am definit deja a_0 şi r_0. Presupunem că am definit a_k şi r_k, pentru orice $k < n$. Dacă n este impar, alegem $a_n \in B(a_{n-1}, r_{n-1}) \cap C_u$. Observăm că un asemenea element există întrucât mulţimea C_u este densă în E. Folosind acum continuitatea lui u în a_n, există $\delta > 0$ astfel încât $d_2(u(x), u(a_n)) < \frac{1}{2n}$, dacă $d_1(x, a_n) < \delta$. Alegând acum $r_n > 0$ astfel încât $r_n < \min\{\delta, \frac{r}{n}, r_{n-1} - d_1(a_n, a_{n-1})\}$, rezultă că dacă $x, y \in B(a_n, r_n)$, atunci

$$d_2(u(x), u(y)) \leq d_2(u(x), u(a_n)) + d_2(u(a_n), u(y)) < \frac{1}{n}.$$

Observăm, de asemenea, că $\overline{(}a_n, r_n) \subset B(a_{n-1}, r_{n-1})$. Intr-adevăr, dacă $d_1(x, a_n) \leq r_n$, atunci

$$d_1(x, a_{n-1}) \leq d_1(x, a_n) + d_1(a_n, a_{n-1}) \leq r_n + d_1(a_n, a_{n-1}) < r_{n-1},$$

adică $x \in B(a_{n-1}, r_{n-1})$.

Dacă n este par, construim similar a_n şi r_n, cu singura observaţie că înlocuim u (resp. C_u) cu v (resp. C_v).

Deoarece E este spaţiu complet şi (r_n) este un şir convergent la zero, putem aplica principiul lui Cantor. Aşadar, există $b \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{B}(a_n, r_n)$. Mai mult, deoarece $\overline{B}(a_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(a_n, r_n)$, deducem că $b \in B(a_n, r_n)$, pentru orice $n \geq 0$.

Arătăm în continuare că funcţiile u c si v sunt continue în b, adică $b \in C_u \cap C_v$. Pentru $\varepsilon > 0$ fixat, alegem un întreg impar N astfel încât $1/N < \varepsilon$. Folosind (iii), rezultă că dacă $\delta < r_N - d_1(b, a_N)$ atunci $d_2(u(x), u(b)) < 1/N < \varepsilon$, dacă $d_1(x, b) < \delta$. Aceasta probează continuitatea lui u în b. In mod similar deducem că $b \in C_v$.

Deoarece $b \in B(a_n, r_n)$ şi $c_n \not\in B(a_n, r_n)$, pentru orice $n \geq 1$, rezultă că $b \not\in C$, adică relaţia (2) este demonstrată. Cu aceasta, demonstraţia teoremei este încheiată.

Bibliografie

1. **R. Baire,** Sur les fonctions de variables réelles, *Annali di Mat.* **3**(III) (1899), 1-123.

2. **J. Dieudonné,** *Abregé d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1986.

3. **W. Dunham**, A historical gem from Vito Volterra, *Math. Magazine* **63** (1990), 234-237.

4. **M. Fréchet,** Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **XXII** (1906), 1-74.

5. **C. Niculescu,** *Fundamentele analizei matematice: 1. Analiza pe dreapta reală*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1996.

6. **G.E. Şilov,** *Analiză matematică*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989.

7. **V. Volterra,** Alcune osservasioni sulle funzioni punteggiate discontinue, *Giornale di Matematiche* **19** (1881), 76-86.

ABOUT A THEOREM OF VOLTERRA RELATED TO CONTINUOUS FUNCTIONS

Abstract. In 1881 Volterra proved that (see [7] and [3]) if two real valued functions defined on R are continuous respectively on two dense subsets of R, then the set of common continuity points is also dense in R.

The aim of my paper is to generalize this result of Volterra for complete metric spaces, proving in addition that the set of common continuity points is not countable.

Particularly, a function can't be continuous only in rational points.

Primit: 20.12.2000

Liceul Economic Gheorghe Chiţu
1100 Craiova