Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 9(1999-2000), 157 - 168

DOUĂ CLASE DE ŞIRURI APROAPE CONVEXE

Adrian SANDOVICI

1. Introducere. În această lucrare vom introduce noţiunea de şir aproape convex ca o generalizare naturală a conceptului de şir subconvex. Noţiunea de şir subconvex de ordin superior a fost introdusă şi studiată de D. Bărbosu în [2] şi de D.Bărbosu şi M. Andronache în [3].

Punctul de plecare îl constituie:

Definiţia 1.1. *Vom numi şir aproape convex de ordinul k ($k \in N^*$) un şir $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de numere reale nenegative care satisface o relaţie de forma:*

(1.1.) $\quad x_{n+k} \leq \alpha_1 \cdot x_{n+k-1} + \alpha_2 \cdot x_{n+k-2} + \ldots + \alpha_k \cdot x_n\ , \quad \forall n \geqslant 1$

sau:

(1.2.) $\quad x_{n+k} \geqslant \alpha_1 \cdot x_{n+k-1} + \alpha_2 \cdot x_{n+k-2} + \ldots + \alpha_k \cdot x_n\ , \quad \forall n \geqslant 1$

unde:

(1.3.) $\quad \alpha_i \geqslant 0\ , \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$

În cazul în care $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ membrul drept al relaţiei (1.1.) sau al relaţiei (1.2.) constituie o combinaţie convexă a termenilor de ranguri n, $n+1$, ..., $n+k-1$ ai şirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$. Din acest motiv considerăm justificată pentru $(x_n)_{n\geqslant 1}$ denumirea de şir aproape convex.

Impunând condiţii suplimentare asupra coeficienţilor α_1, α_2,...,α_k obţinem doua clase speciale de şiruri aproape convexe. Acestea sunt precizate în:

Definiţia 1.2. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir de numere reale nenegative şi* $k \in N^*$.

a) Spunem ca şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este subconvex de ordinul k daca sunt satisfacute următoarele condiţii:*

(1.4.) $x_{n+k} \leq \alpha_1 \cdot x_{n+k-1} + \alpha_2 \cdot x_{n+k-2} + ... + \alpha_k \cdot x_n \ , \quad \forall n \geqslant 1$

unde:

(1.5.) $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \leqslant 1 \ , \quad \alpha_i \in (0,1) \ , \quad \forall i \in \{1,2,...,k\}$

b) Spunem ca şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este supraconvex de ordinul k daca sunt îndeplinite condiţiile:*

(1.6.) $x_{n+k} \geqslant \alpha_1 \cdot x_{n+k-1} + \alpha_2 \cdot x_{n+k-2} + ... + \alpha_k \cdot x_n \ , \quad \forall n \geqslant 1$

unde:

(1.7.) $\alpha_i \in (0,+\infty) \ , \quad \forall i \in \{1,2,...,k\}$

Observaţia 1.1.

A. Definiţia noţiunii de şir subconvex de ordinul k a fost data de D. Bărbosu în [2].

B. Dacă în definiţia de mai sus considerăm $k = 1$ atunci şirul de numere reale nenegative $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este subconvex de ordinul întâi daca există $\alpha \in (0,1)$ astfel încât:

(1.8.) $x_{n+1} \leqslant \alpha \cdot x_n \ , \quad \forall n \geqslant 1$

Se observă uşor faptul că orice şir subconvex de ordinul întâi este convergent şi are limita $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

C. Dacă în Definiţia 1.2. particularizăm k=1 atunci şirul de numere reale nenegative $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este supraconvex de ordinul întâi dacă există $\alpha \in (0,+\infty)$ astfel încât:

(1.9.) $x_{n+1} \geqslant \alpha \cdot x_n \ , \quad \forall n \geqslant 1$

În legătură cu şirurile supraconvexe de ordinul întâi se poate demonstra uşor următorul rezultat:

Propoziţia 1.1. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir supraconvex de ordinul întâi.*

a) Dacă $\alpha = 1$ *iar şirul* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este mărginit superior atunci şirul* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este convergent.*

b) Dacă $\alpha > 1$ *atunci şirul* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este divergent spre* $+\infty$.

D. Dacă în (1.4.) şi (1.6.) avem egalitate obţinem un şir dat printr-o relaţie de recurenţă liniara de ordinul k. Această situaţie a fost studiată în mai multe articole, note sau tratate de analiză matematică. O abordare interesanta a şirurilor recurente de ordin superior folosind noţiunea de "ecuaţie caracteristică" şi conceptul de "diferenţe finite de ordin superior" se găseşte în [2 (vezi Capitolul "Spaţiul vectorial al şirurilor recurente de ordinul k", pag. 72–89).

2. Convergenţa şirurilor subconvexe de ordin superior

Convergenţa şirurilor subconvexe de ordinul doi a fost tratată exhaustiv în [2] şi [3]. În [2] se arată că orice şir subconvex de ordinul 2 în sensul Definiţiei 1.2. este convergent. Două demonstraţii diferite ale rezultatului menţionat mai sus sunt prezentate în [3]. Mai mult, folosind o teorema din [4], D. Bărbosu a stabilit în lucrarea [2] o condiţie suficienta de convergenţă pentru şirurile subconvexe de ordinul k.

Rezultatul central al acestei secţiuni este cuprins în:

Teorema 2.1. *Orice şir $(x_n)_{n\geqslant 1}$ subconvex de ordinul k este convergent.*

Demonstraţie. Definim şirul $(y_n)_{n\geqslant 1}$ prin intermediul relaţiei:

(2.1.) $\quad y_n = \max\{x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k-1}\}\ ,\quad \forall n \geqslant 1$

Ţinând cont de faptul că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este un şir subconvex, putem scrie $x_{n+k} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot x_{n+k-i} \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i\right) \cdot y_n \leqslant y_n$. Prin urmare:

(2.2.) $\quad x_{n+k} \leqslant y_n$

Folosind formula de definiţie (2.1.) şi relaţia (2.2.) urmează ca şirul $(y_n)_{n\geqslant 1}$

este monoton descrescător şi deoarece este mărginit inferior de 0 rezultă că este convergent. Facem notaţia:

(2.3.) $\quad L = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

Vom arăta în continuare că şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent către L. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar ales şi fixat. Considerăm numărul real strict pozitiv dat de următoarea relaţie:

(2.4.) $\quad t = \min\left\{\frac{\alpha_1^k}{(1-\alpha_1)\cdot 2^k}, 1\right\}$

Se observa ca şirul $(b_n)_{n\geqslant 1}$, $b_n = \frac{\alpha_1^n}{(1-\alpha_1)\cdot 2^n}$ este monoton descrescator. In consecinţa are loc relaţia:

(2.5.) $\quad t \leqslant b_i\ ,\quad \forall i \in \{1, 2, ..., k\}$

Din (2.3.) rezulta ca exista $n_\varepsilon \in N^*$ astfel incat:

(2.6.) $\quad y_n < L + t \cdot \varepsilon\ ,\quad \forall n \geqslant n_\varepsilon$

Folosind ultima relaţie şi definiţia şirului $(y_n)_{n\geqslant 1}$ obţinem:

(2.7.) $\quad x_i < L + t \cdot \varepsilon\ ,\quad \forall i \geqslant n_\varepsilon$

Presupunem prin reducere la absurd că există $m \in N^*$, $m \geqslant n_\varepsilon + k$ astfel încât:

(2.8.) $\quad x_m \leqslant L - \varepsilon$

Vom arăta prin inductie că:

(2.9.) $\quad x_{m+p} \leqslant L - \varepsilon \cdot \frac{\alpha_1^p}{2^p},\quad \forall p \in \{1, 2, ..., k-1\}$

Pentru $p = 1$ avem $x_{m+1} \leq \alpha_1 \cdot x_m + \alpha_2 \cdot x_{m-1} + ... + \alpha_k \cdot x_{m-k+1}$.

Ţinând cont de relaţiile (1.5.), (2.5.) si (2.7.) avem succesiv:

$$
\begin{aligned}
x_{m+1} &\leq \alpha_1 \cdot x_m + (\alpha_2 + ... + \alpha_k) \cdot (L + t \cdot \varepsilon) \\
&\leqslant \alpha_1 \cdot (L - \varepsilon) + (1 - \alpha_1) \cdot (L + t \cdot \varepsilon) \\
&\leqslant L + b_1 \cdot \varepsilon \cdot (1 - \alpha_1) - \varepsilon \cdot \alpha_1 = L - \varepsilon \cdot \tfrac{\alpha_1}{2}
\end{aligned}
$$

Presupunem afirmaţia adevărată pentru $p \in \{1, 2, ..., k-2\}$ şi o demonstrăm pentru $p+1$. Folosind din nou relaţiile (1.5.), (2.5.), (2.7.) şi în plus ipoteza de inducţie, vom avea:

$$
\begin{aligned}
x_{m+p+1} &\leq \alpha_1 \cdot x_{m+p} + \alpha_2 \cdot x_{m+p-1} + ... + \alpha_{k-1} \cdot x_{m+p-k+2} + \alpha_k \cdot x_{m+p-k+1} \\
&< \alpha_1 \cdot x_{m+p} + (\alpha_2 + ... + \alpha_k) \cdot (L + t \cdot \varepsilon) \\
&\leqslant \alpha_1 \cdot \left(L - \varepsilon \cdot \tfrac{\alpha_1^p}{2^p}\right) + (1 - \alpha_1) \cdot (L + t \cdot \varepsilon) \\
&\leqslant L - \varepsilon \cdot \tfrac{\alpha_1^{p+1}}{2^p} + (1 - \alpha_1) \cdot b_{p+1} \cdot \varepsilon = L - \varepsilon \cdot \tfrac{\alpha_1^{p+1}}{2^{p+1}}
\end{aligned}
$$

Cu aceasta inducţia este completă.

Din relaţia (2.9.) obţinem:

(2.10.) $x_{m+p} < L, \quad \forall p \in \{1, 2, ..., k-1\}$

Din relaţiile (2.8.) şi (2.10.) rezultă că $y_m < L$, în contradicţie cu faptul ca şirul $(y_n)_{n\geqslant 1}$ converge descrescător către L. Prin urmare presupunerea facută este falsă şi deci pentru orice $n \geqslant n_\varepsilon + k$ avem:

(2.11.) $L - \varepsilon < x_n \leqslant y_n < L + t \cdot \varepsilon \leqslant L + \varepsilon$

Din relaţia de mai sus rezultă că şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent catre L. ■

Observatia 2.1. Dacă $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i < 1$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Corolarul 2.1. *Şirul de numere reale nenegative $(x_n)_{n\geqslant 1}$ care satisface condiţiile:*

(2.12.) $x_{n+k}^{\gamma_k} \leq \alpha_1 \cdot x_{n+k-1}^{\gamma_{k-1}} + \alpha_2 \cdot x_{n+k-2}^{\gamma_{k-2}} + ... + \alpha_k \cdot x_n^{\gamma_0}, \quad \forall n \geqslant 1$

unde:

(2.13.) $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \leqslant 1, \quad \alpha_i \in R_+^*, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., k\}$

(2.14.) $\gamma_j \in N^*, \quad \forall j \in \{0, 1, 2, ..., k\} \quad \gamma_k \leqslant \min\{\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{k-1}\}$

(2.15.) $x_j \in [0, 1], \quad \forall j \in \{1, 2, ..., k\}$

este convergent.

Demonstraţie. Mai întâi se poate arăta prin inducţie faptul că $x_j \in [0, 1]$, $\forall j \in N^*$. Definim $\beta = \min\{\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{k-1}\}$. Avem:

$$
\begin{aligned}
x_{n+k}^\beta \leqslant x_{n+k}^{\gamma_k} &\leq \alpha_1 \cdot x_{n+k-1}^{\gamma_{k-1}} + \alpha_2 \cdot x_{n+k-2}^{\gamma_{k-2}} + ... + \alpha_k \cdot x_n^{\gamma_0} \\
&\leqslant \alpha_1 \cdot x_{n+k-1}^\beta + \alpha_2 \cdot x_{n+k-2}^\beta + ... + \alpha_k \cdot x_n^\beta
\end{aligned}
$$

Din relaţia de mai sus urmează că şirul $(x_n^\beta)_{n\geqslant 1}$ este subconvex de ordinul k, deci conform Teoremei 2.1. este convergent. Prin urmare şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent. ■

Corolarul 2.2. *Fie $k \in N^*$. Orice şir de numere reale $(x_n)_{n\geqslant 1}$ care este mărginit inferior şi satisface condiţiile:*

(2.16.) $\quad x_{n+k} \leq \alpha_1 \cdot x_{n+k-1} + \alpha_2 \cdot x_{n+k-2} + ... + \alpha_k \cdot x_n \ , \quad \forall n \geqslant 1$

unde:

(2.17.) $\quad \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \ , \quad \alpha_i \in (0,1) \ , \quad \forall i \in \{1, 2, ..., k\}$

este convergent.

Demonstraţie. Fie A marginea inferioara a şirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$. Şirul auxiliar $(z_n)_{n\geqslant 1}$, $z_n = x_n - A$ este un şir de numere nenegative care satisface ipotezele Teoremei 2.1. Prin urmare şirul $(z_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent. Acest fapt atrage convergenţa şirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$. ■

Folosind rezultatul conţinut în Teorema 2.1. se poate îmbunătăţi rezultatul Corolarului 3.6. din [2]. Mai precis are loc:

Corolarul 2.3. *a) Fie $k \in N^*$ şi $(c_n)_{n\geqslant 1}$ un şir de numere reale supraunitare. Dacă există $\alpha_1,\ \alpha_2, ..., \alpha_k \in (0,1)$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \leqslant 1$ astfel încât să aibă loc inegalitatea:*

(2.18.) $c_{n+k} \leqslant c_{n+k-1}^{\alpha_1} \cdot c_{n+k-2}^{\alpha_2} \cdot ... \cdot c_n^{\alpha_k}$

atunci şirul $(c_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent.

b) Orice şir $(d_n)_{n\geqslant 1}$ de numere reale supraunitare care verifică relaţia:

(2.19.) $\quad d_{n+k} \leqslant \sqrt[k]{d_{n+k-1} \cdot d_{n+k-2} \cdot ... \cdot d_n} \ , \quad \forall n \geqslant 1$

este convergent.

Demonstraţie.

a) Mai întâi observăm ca şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $x_n = \ln c_n$ este subconvex de ordinul k.

Apoi aplicăm Teorema 2.1.

b) Aplicăm punctul a) pentru $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = \frac{1}{k}$. ■

3. Convergenţa şirurilor supraconvexe de ordinul 2

Particularizând Definitia 1.1.b) pentru cazul k=2 obţinem:

Definiţia3.1. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un şir de numere reale nenegative. Spunem ca şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este supraconvex de ordinul 2 daca sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

(3.1.) $\quad x_{n+2} \geqslant \alpha \cdot x_{n+1} + \beta \cdot x_n \ , \quad \forall n \geqslant 1$

unde:

(3.2.) $\quad \alpha > 0 \ , \beta > 0$

Exemplul 3.1. Şirul constant $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $x_n = a \in R \ , \forall n \geqslant 1$ este supraconvex în sensul Definiţiei 3.1. (putem alege $\alpha > 0 \ , \beta > 0, \alpha + \beta = 1$). Acest şir este evident convergent şi are limita $L_1 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Exemplul 3.2. Şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ cu termenul general dat de:

$$(3.3.)\quad x_1 = 10^{-10} \quad , \quad x_n = \begin{cases} \frac{1}{k}, \text{ daca } n = 2k,\ k \geqslant 1 \\ \\ \frac{1}{2k}, \text{ daca } n = 2k+1,\ k \geqslant 1 \end{cases}$$

cu $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$ este şir supraconvex de ordinul 2. Acest şir este convergent şi are limita $L_2 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Exemplul 3.3. Şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ cu termenul general dat de $x_n = 10^n$, $\forall n \geqslant 1$ este supraconvex de ordinul 2 în sensul Definiţiei 3.1. (am ales $\alpha = \beta = 1$). Acest şir este divergent şi are limita $L_3 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Din exemplele date mai sus remarcam faptul că şirurile supraconvexe sunt esenţial diferite de şirurile subconvexe, din punctul de vedere al convergenţei. Această observaţie va fi argumentată şi de următoarele rezultate privind şirurile supraconvexe de ordinul 2.

Teorema 3.1. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un şir supraconvex de ordinul 2. Daca sunt îndeplinite condiţiile:*

(3.4.) $\quad x_n \in (0, M] \quad , \quad \forall n \geqslant 1 \quad , \quad M > 0$

(3.5.) $\quad \alpha + \beta = 1$

atunci şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent.

Demonstraţie. Considerăm şirul auxiliar $(y_n)_{n\geqslant 1}$ dat prin:

(3.6) $\quad y_n = x_{n+1} + \beta \cdot x_n \quad , \quad \forall n \geqslant 1$

Din (3.1.) avem:

$y_{n+1} = x_{n+2} + \beta \cdot x_{n+1} \geqslant \alpha \cdot x_{n+1} + \beta \cdot x_n + \beta \cdot x_{n+1} = x_{n+1} + \beta \cdot x_n = y_n$

Prin urmare:

(3.7.) $\quad y_n \leqslant y_{n+1} \quad , \quad \forall n \geqslant 1$

Pe de altă parte, folosind (3.4.) si (3.6.) obţinem:

(3.8.) $\quad 0 < y_n \leqslant (1+\beta) \cdot M \quad , \quad \forall n \geqslant 1$

Din (3.7.) si (3.8.) urmează că şirul $(y_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent. Notăm:

(3.9.) $\quad L = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Din (3.9.) rezultă ca există $n_0 \in N^*$ astfel încât:

(3.10.) $\quad L - \varepsilon(1-\beta) < y_n < L - \varepsilon(1-\beta) \quad , \quad \forall n \geqslant n_0$

Relaţia de mai sus se poate rescrie sub forma:

(3.11.) $\quad L - \varepsilon(1-\beta) - \beta \cdot x_n < x_{n+1} < L - \varepsilon(1-\beta) - \beta \cdot x_n \quad , \quad \forall n \geqslant n_0$

In relaţia (3.11.) atribuim succesiv $n := n_0, n_0+1, ..., n-1$, unde $n \in N^*$, $n \geqslant n_0 + 1$.

Relaţiile obţinute le înmulţim cu $1, -\beta, \beta^2, -\beta^3, ..., (-\beta)^{n-n_0-1}$ iar apoi le sumăm membru cu membru. După calcule relativ simple obţinem:

(3.12.) $\quad x_n < \frac{L}{1+\beta} + \varepsilon \cdot \left(1 - \beta^{n-n_0}\right) + \alpha_n \quad , \quad \forall n \geqslant n_0 + 1$

(3.13.) $x_n > \frac{L}{1+\beta} - \varepsilon \cdot \left(1 - \beta^{n-n_0}\right) + \alpha_n$, $\forall n \geqslant n_0 + 1$
unde:
(3.14.) $\alpha_n = \frac{L}{1+\beta} \cdot \beta^{n-n_0} + (-\beta)^{n-n_0} \cdot x_{n_0}$, $\forall n \geqslant n_0 + 1$
Daca definim şirul $(z_n)_{n \geqslant n_0+1}$, $z_n = x_n + \alpha_n$ şi dacă în plus utilizăm (3.12.) şi (3.13.), atunci obţinem:
(3.15.) $-\varepsilon < z_n - \frac{L}{1+\beta} < \varepsilon$, $\forall n \geqslant n_0 + 1$
Ultima relaţie exprimă faptul că şirul $(z_n)_{n \geqslant n_0+1}$ este convergent şi, în plus $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \frac{L}{1+\beta}$. Pe de altă parte, din (3.14.) rezultă că şirul $(\alpha_n)_{n \geqslant n_0+1}$ este convergent şi are limita $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Din observaţiile făcute mai sus rezultă că şirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este convergent iar limita sa este dată de:
(3.16.) $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{1+\beta} = \frac{L}{1+\beta}$
Cu aceasta demonstraţia teoremei este completă. ■

Obsevaţia 3.1.

a) Rezultatul de mai sus are consistenţa deoarece şirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ cu termenul general $x_n = \frac{n}{n+1}$, $\forall n \geqslant 1$ este un şir supraconvex de ordinul 2 (alegem $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$) care verifica ipotezele teoremei şi este evident convergent cu limita egală cu 1.

b) Rezultatul conţinut de Teorema 3.1. ramâne valabil dacă înlocuim condiţia (3.5.) cu:
(3.17.) $\alpha + \beta \geqslant 1$, $\beta \in (0, 1)$

Corolarul 3.1. *Orice şir $(x_n)_{n \geqslant 1}$ de numere reale care satisface condiţiile:*
(3.18.) $x_n \in [m, M]$, $\forall n \geqslant 1$, $m, M \in R$, $m < M$
(3.19.) $x_{n+2} \geqslant \alpha \cdot x_{n+1} + \beta \cdot x_n$, $\forall n \geqslant 1$
unde:
(3.20.) $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$
este convergent.

Demonstraţie. Şirul auxiliar $(z_n)_{n \geqslant 1}$, $z_n = x_n - m$ este un şir de numere nenegative care satisface ipotezele Teoremei 3.1. Prin urmare şirul $(z_n)_{n \geqslant 1}$ este convergent. Acest fapt atrage convergenţa şirului $(x_n)_{n \geqslant 1}$. ■

Teorema 3.2. *Fie $(x_n)_{n \geqslant 1}$ un şir supraconvex de ordinul 2. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:*
(3.21.) $x_1 > 0, x_2 > 0$
(3.22.) $\max(\alpha, \beta) > 1$
atunci şirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este divergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Demonstraţie. Prin inducţie după $n \in N^*$ se arată că $x_n > 0$, $\forall n \geqslant 1$.
Cazul I: $\alpha = \max(\alpha, \beta)$. Din (3.1.) obţinem:
(3.23.) $x_{n+2} > \alpha \cdot x_{n+1}$, $\forall n \geqslant 1$

Din (3.23.) rezultă că:

(3.24.) $\quad x_n > \alpha^{n-2} \cdot x_2 \ , \ \forall n \geqslant 3$

Ţinând cont de (3.21.), (3.22.) şi (3.24.) urmează concluzia teoremei.

Cazul II: $\beta = \max(\alpha, \beta)$. Din relaţia (3.1.) obţinem:

(3.25.) $\quad x_{n+2} > \alpha \cdot x_{n+1} \ , \ x_{n+2} > \beta \cdot x_n \ , \ \forall n \geqslant 1$

Dupa calcule simple, din $(3.25.)_2$ deducem:

(3.26.) $\quad x_{n+1} \cdot x_n > \beta^{n-1} \cdot x_1 \cdot x_2 \ , \ \forall n \geqslant 2$

Relatia (3.25.) poate fi rescrisa sub forma:

(3.27.) $\quad \frac{1}{\alpha} \cdot x_{n+2} > x_{n+1} \ , \ \frac{1}{\beta} \cdot x_{n+2} > x_n \ , \ \forall n \geqslant 1$

Combinand ultimele doua relatii avem:

(3.28.) $\quad x_n > \beta^{\frac{n-2}{2}} \cdot \sqrt{\alpha \cdot x_1 \cdot x_2} \ , \ \forall n \geqslant 4$

Din (3.21.), (3.22.) si (3.28.) urmează concluzia teoremei. ■

Teorema 3.3. *Orice şir $(x_n)_{n\geqslant 1}$ nemărginit superior şi supraconvex de ordinul 2, care are termenii numere reale strict pozitive şi pentru care coeficienţii verifica relaţia $\alpha + \beta \geqslant 1$ este divergent şi are limita ∞.*

Demonstraţie. Vom folosi şirul auxiliar $(y_n)_{n\geqslant 1}$ dat de (3.6). Folosind (3.1.) şi relaţia din ipoteză avem succesiv:

$y_{n+1} = x_{n+2} + \beta \cdot x_{n+1} \geqslant \alpha \cdot x_{n+1} + \beta \cdot x_n + \beta \cdot x_{n+1} \geqslant x_{n+1} + \beta \cdot x_n = y_n$

Prin urmare şirul $(y_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton crescator. Pe de alta parte, tot din (3.1.) se observă că $y_n > \beta \cdot x_n$. Ţinând cont de faptul că şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este nemărginit superior urmează că şi $(y_n)_{n\geqslant 1}$ are aceeaşi proprietate. Ultimele doua observaţii ne îndreptăţesc să afirmăm că şirul $(y_n)_{n\geqslant 1}$ diverge şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Din (3.1.) obţinem:

(3.29.) $\quad \frac{1}{\alpha} \cdot x_{n+2} > x_{n+1} \ , \ x_{n+2} > \beta \cdot x_n \ , \ \forall n \geqslant 1$

Adunând relaţiile din (3.29.) obţinem:

(3.30.) $\quad \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot x_{n+2} > y_n \ , \ \forall n \geqslant 1$

Din faptul ca $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ şi ţinand cont de (3.30.) urmează concluzia teoremei.■

4. Condiţii suficiente pentru convergenţa şirurilor supraconvexe de ordin superior

In aceasta secţiune vom extinde unele rezultate obţinute în secţiunea 2. Mai precis vom stabili condiţii suficiente pentru ca un şir supraconvex de ordinul k în sensul Definiţiei 1.2. să fie convergent sau să fie divergent cu limita ∞. În continuare vom lucra cu coeficienţi α_1, α_2,...,α_k care satisfac condiţia:

(4.1.) $\quad \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \geqslant 1$

O prima condiţie suficienta de convergenţă se obţine dacă folosim urmatorul rezultat stabilit de D. Mihet şi M. Piticari în [5]:

Teorema 4.1. *Fie a_1, a_2,...,$a_k \in R$ iar $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea că şirul $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ de termen general:*

(4.2.) $\beta_n = x_{n+k} + a_1 \cdot x_{n+k-1} + a_2 \cdot x_{n+k-2} + ... + a_k \cdot x_n \ , \ \ \forall n \geqslant 1$

este convergent. Dacă ecuaţia:

(4.3.) $x^k + a_1 \cdot x^{k-1} + a_2 \cdot x^{k-2} + ... + a_{k-1} \cdot x + a_k = 0$

are rădăcinile de modul subunitar, atunci şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent.

Propozitia 4.1. *Dacă $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este un şir mărginit superior şi supraconvex de ordinul k, atunci şirul $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ care are termenul general dat prin:*

(4.4.) $\begin{aligned}\beta_n &= x_{n+k-1} + (\alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_k) \cdot x_{n+k-2} \\ &+ (\alpha_3 + ... + \alpha_k) \cdot x_{n+k-3} + ... + \alpha_k \cdot x_n \ , \forall n \geqslant 1\end{aligned}$

este convergent.

Demonstraţie. Din faptul ca termenii şirului sunt pozitivi iar coeficienţii α_1, α_2,...,α_k au aceeaşi proprietate rezultă că şirul $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ are toţi termenii pozitivi. Pe de altă parte:

(4.5.) $\begin{aligned}\beta_{n+1} - \beta_n &= x_{n+k} + (\alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_k - 1) \cdot x_{n+k-1} - \\ &- \alpha_2 \cdot x_{n+k-2} - \alpha_3 \cdot x_{n+k-3} - ... - \alpha_{k-1} \cdot x_{n+1} - \alpha_k \cdot x_n\end{aligned}$

Din (4.1.) obţinem:

(4.6.) $(\alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_k - 1) \cdot x_{n+k-1} \geqslant -\alpha_1 \cdot x_{n+k-1}$

Folosind relaţiile (4.5.)–(4.6.) şi faptul că şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este subconvex de ordinul k, deducem că şirul $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton crescător. Şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ fiind mărginit superior urmează că există $M > 0$ astfel încât $x_n \leqslant M$, $\forall n \geqslant 1$. Folosind formula termenului general al şirului $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ obţinem:

(4.7.) $\beta_n \leqslant M\,(1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + ... + (k-1)\alpha_k) \ , \ \ \forall n \geqslant 1$

Am arătat că şirul $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ este mărginit superior şi monoton crescător, prin urmare este convergent. ■

Folosind rezultatele anterioare vom demonstra:

Teorema 4.2. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un şir mărginit superior şi supraconvex de ordinul k, $k \in N^*$, $k \geqslant 3$. Dacă ecuaţia:*

(4.8.) $x^k + (\alpha_2 + ... + \alpha_k) \cdot x^{k-1} + ... + (\alpha_{k-1} + \alpha_k) \cdot x + a_k = 0$

are toate rădacinile de modul subunitar, atunci şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent.

Demonstraţie. Considerăm şirul auxiliar $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ care are termenul general dat de relaţia (4.4.). Conform Propoziţiei 4.1. acesta este convergent. Aplicând Teorema 4.1. vom obţine că şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent. ■

Observaţia 4.1. În condiţiile Teoremei 4.2., dacă notăm $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $L = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$ atunci are loc urmatoarea egalitate care exprimă legatura între l şi L:

(4.9.) $l = \frac{L}{1+\alpha_2+2\alpha_3+...+(k-1)\alpha_k}$

Corolarul 4.1. *Fie $k \in N^*$, $k \geqslant 3$ şi $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un şir de numere reale care este mărginit şi care satisface condiţiile:*

(4.10.) $\quad x_{n+k} \geqslant \alpha_1 \cdot x_{n+k-1} + \alpha_2 \cdot x_{n+k-2} + ... + \alpha_k \cdot x_n \ , \quad \forall n \geqslant 1$

unde:

(4.11.) $\quad \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \ , \quad \alpha_i \in (0,1) \ , \quad \forall i \in \{1,2,...,k\}$

Daca ecuaţia:

(4.12.) $\quad x^k + (\alpha_2 + ... + \alpha_k) \cdot x^{k-1} + ... + (\alpha_{k-1} + \alpha_k) \cdot x + a_k = 0$

are toate rădăcinile de modul subunitar, atunci şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent.

Demonstraţie. Fie B marginea inferioară a şirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$. Şirul auxiliar $(z_n)_{n\geqslant 1}$, $z_n = x_n - B$ este un şir de numere nenegative care satisface ipotezele Teoremei 4.2. Prin urmare şirul $(z_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent. Acest fapt atrage convergenta sirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$.■

Corolarul 4.2. *a) Fie $k \in N^*$, $k \geqslant 3$ şi $(c_n)_{n\geqslant 1}$ un şir de numere reale supraunitare mărginit superior cu proprietatea că există $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in (0,\infty)$, astfel încât:*

(4.13.) $\quad \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \geqslant 1$

(4.14.) $\quad c_{n+k} \geqslant c_{n+k-1}^{\alpha_1} \cdot c_{n+k-2}^{\alpha_2} \cdot ... \cdot c_n^{\alpha_k}$

Dacă ecuaţia:

(4.15.) $\quad x^k + (\alpha_2 + ... + \alpha_k) \cdot x^{k-1} + ... + (\alpha_{k-1} + \alpha_k) \cdot x + a_k = 0$

are toate rădăcinile de modul subunitar, atunci şirul $(c_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent.

Demonstraţie. Mai întâi observăm că şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $x_n = \ln c_n$ este subconvex de ordinul k şi satisface ipotezele Teoremei 4.2. În final aplicăm Teorema 4.2. ■

În continuare vom enunţa două rezultate de divergentă cu privire la şirurile supraconvexe de ordin superior. Ele generalizeaza rezultatele conţinute în Teorema 3.2. şi respectiv Teorema 3.3.

Teorema 4.3. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un şir supraconvex de ordinul k, $k \in N^*$, $k \geqslant 3$. Daca sunt îndeplinite condiţiile:*

(4.16.) $\quad x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ ...,\ x_k > 0$

(4.17.) $\quad \max(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) > 1$

atunci şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este divergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Demonstraţie. Se repeta pasii facuţi în demonstraţia Teoremei 3.2. ■

Teorema 4.4. *Fie $k \in N^*$, $k \geqslant 3$. Orice şir $(x_n)_{n\geqslant 1}$ nemarginit superior, supraconvex de ordinul k care are termenii numere reale strict pozitive şi pentru care coeficienţii verifică relaţia $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \geqslant 1$ este divergent şi are limita ∞.*

Demonstraţie. Este analoaga cu aceea a Teoremei 3.3. ■

Ramâne deschisă problema determinării unor condiţii suficiente mai "bune" de convergenţă sau divergenţă la $+\infty$ pentru şirurile supraconvexe de ordin superior.

In final, doresc să exprim mulţumiri d–lui *conf. dr. Dan Bărbosu* pentru spijinul acordat pe parcursul elaborării prezentei lucrări.

Bibliografie

1. Avădanci, C.,..., *De la matematica elementară spre matematica superioară*, Editura Academiei, Bucureşti, 1987.

2. Bărbosu, D., *Asupra unor recurenţe subconvexe*, Lucrările Seminarului de Creativitate Matematică, vol. 3 (1993–1994), 53–60.

3. Bărbosu, D., Andronache, M., *Asupra convergenţei şirurilor subconvexe*, Gazeta Matematică, nr. 1 / 1997.

4. Miheţ, D., Piticari, M., *O problemă de convergenţă*, Gazeta Matematică (metodică) nr. 1 (1990), 30–31.

TWO CLASSES OF ALMOST CONVEX SEQUENCES

Abstract. In this article we introduce the concept of almost convex sequence, as a natural generalization of the notion of subconvex sequence, defined and studied by D. Bârbosu in [2], and also by D. Bărbosu and M. Andronache in [3].

Primit: 22.12.2000

Colegiul Naţional Petru Rareş
Str. Ştefan cel Mare, nr. 4,
5600, Piatra Neamţ,
ROMANIA
E-mail:adi.sandovici@ctce.ro