Lucrările Seminarului de
CREATIVIATATE MATEMATICĂ
Vol. 9(1999-2000), 179-184

# ASUPRA UNEI INEGALITĂŢI PRIVITOARE

# LA NUMĂRUL "e"

Andrei VERNESCU

**1.** Fie $e, f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $e(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ funcţiile care extind la variabila reală şi pozitivă şirurile de termen general $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ convergente către numărul e.

Pentru a stabili dubla inegalitate

$$e(x) < e < f(x) \quad (x > 0) \tag{1}$$

ce extinde în $\mathbb{R}_+^*$ inegalitatea de şiruri $e_n < e < f_n$, se pot utiliza derivatele

$e'(x) = e(x)\left((\Delta L)(x) - \frac{1}{x+1}\right)$, $f'(x) = f(x)\left((\Delta L)(x) - \frac{1}{x}\right)$ $(x > 0)$ unde $(\Delta L)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ln(x+1) - \ln x$, iar apoi, ţinând seama de inegalitatea lui *Neper*

$$\frac{1}{x+1} < (\Delta L)(x) < \frac{1}{x} \ \ (x > 0)$$

rezultă că $e'(x) > 0$ şi $f'(x) < 0$, deci funcţia $x \mapsto e(x)$este strict crescătoare, iar funcţia $x \mapsto f(x)$ este strict descrescătoare. Comparând cu limita la $\infty$, egală cu e, obţinem (1).

**2.** Există o cale mai rapidă de obţinere a inegalităţii (1), fără a mai face uz de derivate: în inegalitatea lui Neper se restrânge

$$(\Delta L)(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

se separă în două inegalităţi simple, se înmulţeşte prima inegalitate obţinută cu $x+1$, iar a doua cu $x$ şi se exponenţiază. Se obţine(1). Deci, utilizarea derivatelor $e'$ şi $f'$ nu este obligatorie pentru obţinerea inegalităţii (1), ci doar pentru obţinerea *monotoniei* celor două funcţii.

**3.** Să considerăm acum dubla inegalitate $\frac{e}{2n+2} < e - e_n < \frac{e}{2n+1}$, care precizează ordinul de convergenţă al şirului $(e_n)$ către limita sa, numărul e, sau trecând la variabila reală,

$$\frac{e}{2x+2} < e - e(x) < \frac{e}{2x+1} \quad (x > 0) \tag{2}$$

Demonstrarea sa revine la cea a dublei inegalităţi echivalente obţinute prin izolarea numărului e, anume

$$u(x) < e < v(x) \quad (x > 0) \tag{2'}$$

unde am notat $u(x) = e(x)\left(1 + \frac{1}{2x+1}\right)$, $v(x) = e(x)\left(1 + \frac{1}{2x}\right)$. Desigur, inegalitatea (2') este o rafinare a inegalităţii (1); această rafinare este ilustrată în figura 1.

În [3] (pag. 38 şi 216) demonstraţia inegalităţii (2') este complicată, implicând rezolvarea a şapte probleme preliminare, care conţin dezvoltări tayloriene limitate şi care, în final, conduc la rezultat.

În [4], pentru a da o demonstraţie mai simplă inegalităţii (2'), am procedat ca la punctul **1**, obţinând că

$$u'(x) = e(x)\left[\left((\Delta L)(x) - \frac{1}{x+1}\right)\frac{2x+2}{2x+1} - \frac{2}{(2x+1)^2}\right] > 0$$

$$v'(x) = e(x)\left[\left((\Delta L)(x) - \frac{1}{x}\right)\frac{2x+1}{2x} - \frac{1}{2x^2}\right] < 0$$

de unde monotonia strictă a funcţiilor $u$ şi $v$, după care am comparat cu limita la $\infty$, de asemenea numărul e, obţinând (2'). La stabilirea semnului derivatelor $u'$ şi $v'$ am utilizat inegalitatea

$$\frac{2}{2x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} \quad (x > 0) \tag{3}$$

a se vedea [2], pag. 273 şi Addenda), care reprezintă, desigur, o rafinare a inegalităţii lui Neper.

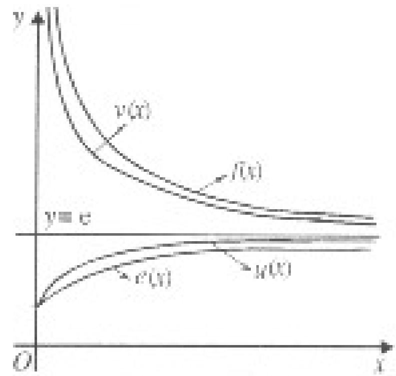


Fig. 1

**4.** Având în vedere cele prezentate, se pune problema dacă nu cumva am putea obţine inegalitatea (2′) direct din inegalitatea (3), evitând utilizarea derivatelor $u'$ şi $v'$, al căror calcul şi minorare, respectiv majorare, sunt laborioase.

Să considerăm prima parte a inegalităţii (3), pe care o scriem succesiv

$\frac{1}{x+1/2} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ sau $1 < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1/2}$, de unde[1] $e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1/2}$ sau încă

$$e < e(x)\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}. \tag{4}$$

Dar $\sqrt{1+\frac{1}{x}} < 1+\frac{1}{2x}$, deci din (4) şi de aici rezultă partea dreaptă a inegalităţii (2′).

Să considerăm acum a doua parte a inegalităţii (3). Pe aceasta o scriem succesiv

$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$ sau $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x(x+1)}} < 1$, de unde

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x(x+1)}} < e. \tag{5}$$

[1] Această inegalitate este, de fapt, cunoscută, deoarece se ştie că funcţia $x \mapsto \varphi_\alpha(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ este descrescătoar (începând de la o anumită valoare $x_0$) dacă şi numai dacă $\alpha \geq \frac{1}{2}$ ([3], pag. 38). Comparând cu limita la oo, se obţine inegalitatea.

Acum afirmăm că are loc inegalitatea

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x(x+1)}}. \tag{6}$$

Într-adevăr, aceasta echivalează succesiv cu $1+\frac{1}{2x+1}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x(x+1)}-x}$ sau $1+\frac{1}{2x+1}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$ sau $1+\frac{1}{2x+1}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}$ sau încă

$$\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \tag{7}$$

(unde vom accepta, eventual, o mică restricţie de forma $x>a$, cu $a>0$).

Vom demonstra (7). Ţinând seama că $1+\frac{1}{2x+1}>1$ şi că $\sqrt{x(x+1)}+x<2x+1$, obţinem

$$\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{\sqrt{x(x+1)}+x}<\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{2x+1}=\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$$

unde am unde am notat $2x+1=t$ şi $x\in(0,\infty)$ echivalează cu $t\in(1,\infty)$. Aşadar, am stabilit (7) pentru $x>1$, deci are loc (6) pentru $x>1$. Din (6) şi (5) rezultă $e(x)\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)<e$, adică partea stângă a inegalităţii (2′), pentru $x>1$.

**5. Addenda.** a) Inegalitatea lui Neper poate fi demonstrată fără utilizarea derivatelor. Într-adevăr, G.M a publicat o demonstraţie elementară a inegalităţii $e^t\geq 1+t$, $\forall t>-1$, cu egalitate dacă şi numai dacă $t=0$ ([5]). Introducând în această inegalitate $t=1/x$, iar apoi $t=-1/(x+1)$ şi logaritmând se obţin partea dreaptă şi respectiv partea stângă a inegalităţii lui Neper .

b) Inegalitatea (3) arată că diferenţa $(\Delta L)(x)$, $(x>0)$ se află nu numai între numerele strict pozitive $\frac{1}{x+1}$ şi $\frac{1}{x}$, *ci chiar între media lor armonică şi geometrică*. Inegalitatea (3) echivalează cu următoarea proprietate ([1]): Punctul "c" din teorema creşterilor finite, aplicată funcţiei $f(x)=\ln x$, pe intervalul $[a,b]\subset(0,\infty)$ satisface inegalitatea

$$\sqrt{ab}<c<\frac{a+b}{2}. \tag{8}$$

Într-adevăr, pentru stabilirea uneia din implicaţii, să luăm în (8) $a=x$ şi $b=x+1$ (ţinând seama că $(\Delta L)(x)=\frac{1}{c}$); se obţine (3). Pentru cealaltă implicaţie, să ţinem seama că punctul "c" are expresia $c = \frac{b-a}{\ln(b/a)}$, deci inegalitatea (8) se va scrie echivalent $\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln(b/a)} < \frac{a+b}{2}$ sau

$\frac{2(b-a)}{a+b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$. Împărţind în părţile extreme numărătorul şi numitorul cu $a$, obţinem inegalitatea $\frac{2(t-1)}{1+t} < \ln t < \frac{t-1}{\sqrt{t}}$, unde am notat $t \overset{\text{def}}{=} \frac{b}{a}$ şi $t > 1$. Notând $t = 1 + \frac{1}{x}$, cu $x > 0$, rezultă (3), care este adevărată; deci are loc (8).

## Bibliografie


1. Lupaş, A.: *Problema 12 739*, G.M., nr. 2. 1973, pag. 109.

2. Mitrinovič, D.S. (in cooperation with Vasič, P.M.): *Analytic Inequalities*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

3. Polýa, G., Szegö, G.: *Theorems and Problems in Analysis*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

4. Vernescu, A.: *O demonstraţie simplă a unei inegalităţi relative la numărul* $e$, G.M., nr. 5-6/1988, pp. 206-207.

5. Vernescu, A., Rădulescu-Banu, A.: *Asupra şirului lui Traian Lalescu*, G.M., nr. 1/1989, pp. 53-54.

## ABOUT AN INEQUALITY CONNECTED WITH THE NUMBER "e"

**Abstract**. In this article we present a simplified proof for the following well-known inequality:

$$\frac{e}{2x+2} < e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \frac{e}{2x+1} \quad (x > 0).$$

Primit 19.10.2000

Colegiul Naţional de Informatică "Tudor Vianu"
Str. Arh. Ion Mincu, nr. 17, Bucureşti