Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 11(2002), 1 - 8

CALCULUL UNOR INTEGRALE DEFINITE

Dumitru ACU

1. Plecând de la calculul integralei

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+tg\ x)dx \tag{1}$$

(v. [9]), mai mulţi autori au căutat să găsească clase cât mai largi de integrale definite care să se calculeze în mod analog (v. [1] - [8], [10], [11]).

În [1]s-a demonstrat următorul rezultat.

Teorema 1. *Fie $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă care satisface egalitatea*

$$\alpha u(x+p)+\beta u(q-x)=v(x+p),\qquad (\forall)x\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

unde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$, $\alpha+\beta\neq 0$, $p,q\in\mathbb{R}$, iar $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă care admite primitiva G. Atunci pentru orice $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât $m+n=p+q$, avem

$$I_{m,n}=\int_m^n u(x)dx=\frac{G(m)-G(n)}{\alpha+\beta} \tag{3}$$

În [3] şi [4] s-a arătat că rezultatele din lucrările [5]-[8] se pot obţine aplicând Teorema 1.

Academicianul Petru Mocanu în [11] obţine următorul rezultat general.

Teorema 2. *Fie $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă care satisface egalitatea*

$$u(\varphi(x))\varphi'(x)-ku(x)+g(x)=0, \tag{4}$$

oricare ar fi $x\in[m,n]$, unde $k\in\mathbb{R}$, $k\neq -1$, $g:[m,n]\to\mathbb{R}$ este o funcţie care admite primitive, iar $\varphi:[m,n]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă, derivabilă, *strict descrescătoare pe intervalul $[m, n]$ şi satisface condiţiile $\varphi(m) = n$ şi $\varphi(n) = m$, atunci*

$$I = \int_m^n u(x)dx = \frac{1}{k+1}\int_m^n g(x)dx. \tag{5}$$

Pentru demonstraţie se face schimbarea de variabilă $x = \varphi(t)$, care transformă intervalul $[m, n]$ în $[m, n]$.

Practic, dacă $I = \int\limits_m^n u(x)dx$, atunci se caută o schimbare de variabilă $x = \varphi(t)$, care transformă $[m, n]$ în $[m, n]$, $\varphi(m) = n, \varphi(n) = m$, iar $u(\varphi(t))$ satisface o egalitate de tipul (4).

În continuare vom prezenta aplicaţii, care vor pune în evidenţă cadrul general de utilizare a Teoremei 2.

2. Dacă considerăm $x = \varphi(t) = m+n-t$, pentru care $\varphi(m) = n, \varphi(n) = m$ şi transformă intervalul $[m, n]$ în $[m, n]$, relaţia (4) ia forma

$$u(m+n-t) + ku(t) = g(t)\,, \quad (\forall)t \in [m, n]. \tag{6}$$

Dacă în (6) punem $k = \alpha/\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha + \beta \neq 0$ şi înlocuim pe t cu $m + t$, atunci (6) devine

$$\alpha u(m+t) + \beta u(n-t) = v(m+t),$$

unde $v = \beta g(m+t)$, adică o relaţie de tipul (2).

Aşadar, Teorema 1 este un caz particular al Teoremei 2.

3. Dacă în Teorema 2 luăm $x = \varphi(t) = 1/t$, cu $x \in \left[a, \frac{1}{a}\right]$ sau $x \in \left[\frac{1}{a}, a\right]$, $a \neq 0$ şi u verifică egalitatea

$$u\left(\frac{1}{t}\right) + kt^2u(t) = t^2g(t), \tag{7}$$

oricare ar fi $t \in \left[a, \frac{1}{a}\right]$ respectiv $t \in \left[\frac{1}{a}, a\right]$, atunci:

$$I = \int_a^{\frac{1}{a}} u(x)dx = \frac{1}{k+1}\int_a^{\frac{1}{a}} g(x)dx. \tag{8}$$

Exemplul 3.1. Problema 7857, G.M. 7/1999, propusă de N. Stoia (Braşov). *Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ şi $a > 1$, avem*

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1 - x^{n-2}}{1 + x^n}dx = 0.$$

Considerăm $u(x) = (1 - x^{n-2})/(1 + x^n)$, $x \in \left[\frac{1}{a}, a\right]$ şi avem

$$u\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t^2(t^{n-2} - 1)}{1 + t^2} = -t^2 u(t),$$

de unde

$$u\left(\frac{1}{t}\right) + t^2 u(t) = 0,$$

adică o relaţie de tipul (7) cu $k = 1$ şi $g \equiv 0$. Atunci din (8) avem

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1 - x^{n-2}}{1 + x^n} dx = \frac{1}{2} \int_{a}^{\frac{1}{a}} o dx = 0.$$

Această problemă poate fi generalizată astfel.
Fie a un număr real pozitiv, $A, B \in \mathbb{R}[x]$ polinoame reciproce de speţa întâia şi de grad m respectiv n şi $B(x) \neq 0$ pentru orice $x > 0$. Calculaţi

i) $I(a) = \displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{A(x)}{B(x)}(1 - x^{n-m-2}) dx$

ii) $I(a) - \displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{A(x)}{B(x)} C(x) dx,$

unde $C \in \mathbb{R}[x]$ este un polinom reciproc de speţa a doua de grad $n - m - 2$, n şi m numere naturale de parităţi diferite, $n \geq m + 1$. (Problema 21089*, G.M. nr.4/1987, D. Acu).

Exemplul 3.2. Problema C: 2231, G.M. 12/1999, propusă de Traian Tămâian (Carei). *Calculaţi*

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{(x \ln x)^{2n-1}}{(x^2 + x + 1)^{2n}} dx, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad n \neq 1.$$

Alegem

$$u(x) = \frac{(x \ln x)^{2n-1}}{(x^2 + x + 1)^{2n}}, \quad x \in \left[\frac{1}{n}, n\right]$$

şi avem

$$u\left(\frac{1}{t}\right) = -t^2 u(t)\ , \qquad (\forall)\ t \in \left[\frac{1}{n}, n\right],$$

care este o relaţie de tipul (7) cu $k = 1$ şi $g \equiv 0$. Din (8) rezultă că $I(n) = 0$.

Observaţia 3.1. *Problema poate fi generalizată luând în loc de x şi $x^2 + x + 1$ polinoamele reciproce.*

Exemplul 3.3. Pentru $a > 0$ şi $b > 0$, $b \neq 1$, calculaţi

$$I(a, b) = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{x^2 + 1}{x^4(b^x + b^{\frac{1}{x}} + 1)} dx.$$

Considerăm

$$u(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4(b^x + b^{\frac{1}{x}} + 1)}$$

şi avem

$$u\left(\frac{1}{t}\right) = -t^2 u(t)\ , \quad (\forall)\ t \in \left[\frac{1}{a}, a\right]$$

şi deci $I(a) = 0$.

4. Dacă luăm $\varphi(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$, $x \in [0, 1]$, atunci avem $\varphi'(x) = -\dfrac{2}{(1 + x)^2}$, iar relaţia (1) ia forma

$$u\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) + \frac{k}{2}(1 + x)^2 u(x) = \frac{(1 + x)^2}{2} g(x), \tag{9}$$

pentru orice $x \in [0, 1]$. În aceste condiţii

$$I = \int_0^1 u(x) dx = \frac{1}{k + 1} \int_0^1 g(x) dx. \tag{10}$$

Exemplul 4.1. Să calculăm

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2} dx \quad ([11]).$$

Considerăm

$$u(x) = \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2}$$

şi avem

$$u\left(\frac{1-t}{1+t}\right)=\frac{\ln 2-\ln(1+t)}{1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}=\frac{[\ln 2-\ln(1+t)](1+t)^2}{2(1+t^2)}=$$
$$=-\frac{1}{2}(1+t)^2u(t)+\frac{\ln 2}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}(1+t)^2$$

adică

$$u\left(\frac{1-t}{1+t}\right)+\frac{(1+t)^2}{2}u(t)=\frac{(1+t)^2}{2}\cdot\frac{\ln 2}{1+t^2}$$

care este o relaţie de tipul (9) cu $k=1$ şi $g(x)=\dfrac{\ln 2}{1+t^2}$. Atunci, din (10) găsim:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln 2}{1+t^2}dt=\frac{\ln 2}{2}arctg\,t\,|_0^1=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

5. Acum, să considerăm

$$\varphi(t)=\frac{At+B}{mt+n}\,,\qquad An-Bm\neq 0$$

aşa încât

$$\varphi(a)=b\quad\text{şi}\quad\varphi(b)=a,$$

de unde rezultă

$$A=-n\quad\text{şi}\quad B=mab+na+nb.$$

Prin urmare, avem schimbarea de variabilă

$$\varphi:[a,b]\to[a,b]$$

$$\varphi(t)=\frac{-nt+mab+na+nb}{mt+n}\tag{11}$$

$$m^2ab+mna+mnb+n^2\neq 0$$

cu

$$\varphi(a)=b,\ \varphi(b)=a$$

$$\varphi'(t)=-\frac{n^2+m^2ab+mn(a+b)}{(mt+n)^2}\,,\qquad t\in[a,b]$$

şi

$$n^2+m^2ab+mn(a+b)>0.$$

Relaţia (4) ia forma

$$u\left(\frac{-ntb+mab+na+nb}{mt+n}\right)+\frac{k(mt+n)^2}{n^2+m^2ab+mn(a+b)}u(t)=$$

$$=\frac{(mt+n)^2}{n^2+m^2ab+mn(a+b)}\cdot g(t). \tag{12}$$

iar (5) devine

$$I=\int_a^b u(x)dx=\frac{1}{x+1}\int_a^b g(x)dx. \tag{13}$$

Exemplul 5.1. Să obţinem rezultatul din [10].
Fie $a,b,m,n,p,q\in\mathbb{R}$ astfel încât $a<b$, $m\neq 0$, $p\neq q$, $q\neq 0$, $m^2q+pm^2>0$, $mab+n(a+b)=\dfrac{mq}{p}$ şi $mx+n>0$, $px^2+q\neq 0$, $(\forall)x\in[a,b]$. Are loc egalitatea

$$\int_a^b \frac{\ln(mx+n)}{px^2+q}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{m^2q+n^2p}{p}\int_a^b\frac{dx}{px^2+q}. \tag{14}$$

Schimbarea de variabilă (11) ia forma

$$x=\varphi(t)=\frac{-nt+\dfrac{mq}{p}}{mt+n}.$$

Considerăm $u=\dfrac{\ln(mx+n)}{px^2+q}$ şi avem

$$u(\varphi(t))=u\left(\frac{-nt+\dfrac{mq}{p}}{mt+n}\right)=\frac{\ln\dfrac{m^2q+n^2p}{p(mt+n)}}{p\left(\dfrac{-nt+\dfrac{mq}{p}}{mt+n}\right)^2+q}=$$

$$=\frac{p(mt+n)^2}{m^2q+n^2p}\cdot\frac{\ln\left(\dfrac{m^2q+n^2p}{p}\right)-\ln(mt+n)}{pt^2+q},$$

de unde

$$u\left(\frac{-nt+\dfrac{mq}{p}}{mt+n}\right)+\frac{p(mt+n)^2}{m^2q+n^2p}u(t)=\frac{p(mt+n)^2}{m^2q+n^2p}\cdot\frac{\ln\dfrac{m^2q+n^2p}{p}}{pt^2+q},$$

care este o relaţie de tipul (12) cu

$$k = 1 \quad \text{şi} \quad g(t) = \frac{\ln \dfrac{m^2q + n^2p}{p}}{pt^2 + q}.$$

Atunci, din (13) avem

$$\int_a^b \frac{\ln(mx+n)}{px^2+q}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{m^2q+n^2p}{p}\int_a^b \frac{dt}{pt^2+q},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Observaţia 5.1. *Integralele de tipul*

$$I = \int_a^b \frac{\ln(cx+d)}{\alpha x^2 + \beta x + c}dx$$

se reduc la integralele de tipul (14) *făcând o schimbare de variabilă de forma* $x + \dfrac{\beta}{2\alpha} = y$.

Exemplul 5.2. Problema 24672, G.M. 3/2002, propusă de Traian Tămâian (Carei). *Calculaţi*

$$I = \int_{\sqrt{2}-2}^{\sqrt{2}} \frac{\ln(x+1)}{x^2+x+1}dx.$$

Punem $x + \dfrac{1}{2} = y$ şi obţinem

$$I = \int_{\sqrt{2}-\frac{3}{2}}^{\sqrt{2}+\frac{1}{2}} \frac{\ln\left(y+\dfrac{1}{2}\right)}{y^2+\dfrac{3}{4}}dy,$$

care este o integrală de tipul (14) cu $m = 1$, $n = \dfrac{1}{2}$, $p = 1$, $q = \dfrac{3}{4}$, $a = \sqrt{2} - \dfrac{3}{2}$ şi $b = \sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$. Avem

$$I = \frac{1}{2}\ln 1 \int_{\sqrt{2}-\frac{3}{2}}^{\sqrt{2}+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2+\dfrac{3}{4}} = 0.$$

Bibliografie

1. D. Acu, *Calcularea unor integrale definite*, Gazeta Matematică, nr. 8, 1980, p. 389.
2. D. Acu, *Néhány határozott integrálról*, Matematikai Lapok, nr. 12, 1981.
3. D. Acu, *O metodă de calcul pentru o clasă de integrale definite*, Lucrările Seminarului de Creativitate Matematică (Baia Mare), vol. 10 (2001), p. 1-8.
4. D. Acu, *Asupra calculului unor integrale definite*, Gazeta Matematică, nr. 4, 2002, p. 150-154.
5. Mihály Bencze, *One Integral Type and its Applications*, Octogon Mathematical Magazine (Braşov), vol. 8, nr. 2, October, 1998, p. 121-127.
6. D. M. Bătineţu Giurgiu, Mihály Bencze, *Calculul unor integrale*, Gazeta Matematică, nr. 3, 2000, p. 104-111.
7. D. M. Bătineţu Giurgiu, Augustin Semenescu, *Asupra unor integrale din Gazeta Matematică*, Lucrările Seminarului de Creativitate Matematică (Baia Mare), vol. 9, 1999-200 , p. 23-32.
8. D. Bătineţu Giurgiu, Augustin Semenescu, *Acuarele integrale*, Lucrările Seminarului Didactica Matematicii (Cluj-Napoca), vol. 16, p.15-20, 2000.
9. N. Boboc, I. Colojoară, *Matematica. Elemente de analiză matematică*, manual pentru cl. a XII-a, E.D.P., 1984.
10. Mihai Dicu, *O generalizare a unei integrale*, Gazeta Matematică, nr. 2, 2000, p. 74-76.
11. Petru Mocanu, *Observaţii privind calculul unor integrale*, Revista de Matematică a elevilor din Transilvania, Ed. Gil (Zalău), nr. 1, 1994, p. 3-5.

COMPUTING SOME DEFINITE INTEGRALS

Abstract. In this article we calculate some definite integrals.

Primit la redacţie: 06.06.2002

Universitatea "Lucian Blaga"
2400 Sibiu, ROMANIA