Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.11(2002), 9 - 18

PROBLEMELE PROPUSE LA « AMERICAN MATHEMATICS COMPETITIONS 10 » DIN 13 FEBRUARIE 2001

Ruxandra BERINDE şi Mădălina BERINDE

1. Introducere

În anul şcolar 2000/2001, un număr de 20 elevi din Maramureş, selectaţi pe baza rezultatelor de la Olimpiada Naţională de Matematică din anul precedent, au participat, în premieră, la concursul de matematică «AMERICAN MATHEMATICS COMPETITIONS 10» (AMC 10), organizat de S.U.A. şi aflat acolo la ediţia a II-a, la care participă şi elevii din Canada. Începând chiar din anul 2001, organizatorii au extins aria de cuprindere a acestui concurs, permiţând şi elevilor din alte ţări care cunosc bine limba engleză să participe la această competiţie.

Câteva date generale privind prima participare şi rezultatele elevilor din Maramureş atât la AMC-10 cât şi la celelalte niveluri ale acestui concurs (AMC-8, AMC-12 şi AIME) pot fi găsite şi în articolul [3] din Gazeta Matematică, nr.7 - 8/2001. Scopul acestui articol era de a-i ajuta pe elevii de liceu care se pregăteau pentru ediţia din 2002 a concursului AMC 10, concurs care a avut loc în data de 12 februarie 2002. Credem că, prezentând enunţurile în limba ramână ale tuturor problemelor date la AMC 10 din 13 februarie 2001, însoţite de rezolvările acestora şi de răspunsurile corecte, oferim un foarte util instrument de lucru, atât pentru profesori cât şi pentru elevi care pot astfel să se familiarizeze cu tipologia problemelor date la acest concurs.

Publicarea acestui articol a fost posibilă numai datorită consimţământului scris obţinut de la AMERICAN MATHEMATICS COMPETITION, pentru reproducerea materialului implicat în concursul AMC 10, aflat în întregime sub restricţia de Copy Right. De aceea, mulţumim şi pe această cale d-lui Titu Andreescu, Directorul de competiţii al S.U.A., nu doar pentru această permisiune, ci şi pentru tot sprijinul acordat la organizarea concursurilor AMC în Maramureş.

2. Enunţurile problemelor

1. Mediana listei de numere

$$n,\ n+3,\ n+4,\ n+5,\ n+6,\ n+8,\ n+10,\ n+12,\ n+15$$

este 10. Cât este media (aritmetică a) acestora?

(A) 4 (B) 6 (C) 7 (D) 10 (E) 11

2. Un număr x este cu 2 mai mare decât produsul dintre inversul său față de înmulțire și inversul față de adunare. Cărui interval îi aparține numărul?

(A) [-4, -2] (B) (-2,0] (C) (0,2] (D) (2, 4] (E) (4,6]

3. Suma a două numere este S. Presupunem că la fiecare dintre ele se adună 3 și apoi fiecare dintre numerele rezultate este dublat. Care este suma numerelor obținute în final?

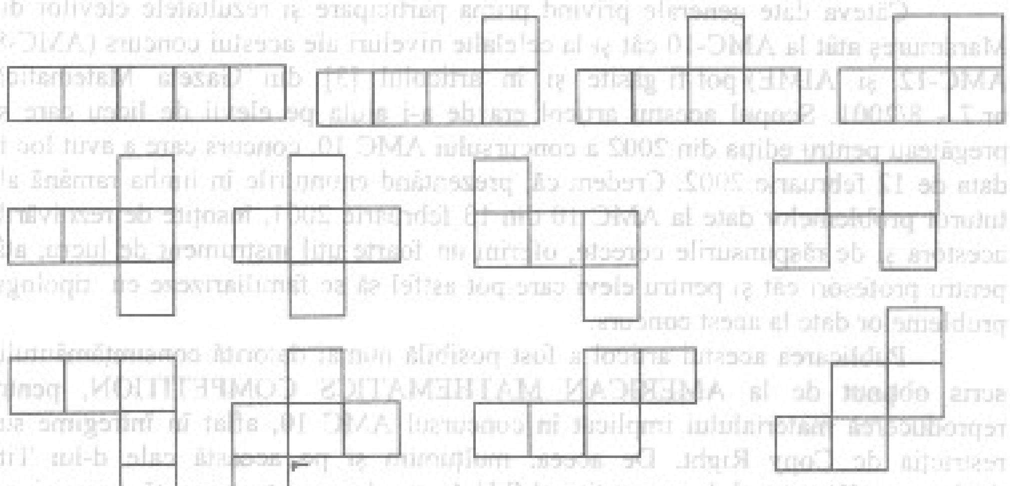
(A) $2S+3$ (B) $3S+2$ (C) $3S+6$ (D) $2S+6$ (E) $2S+12$

4. Care este numărul maxim al punctelor de intersecție ale unui cerc și ale unui triunghi?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

5. Câte dintre figurile de mai jos au cel puțin o axă de simetrie?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7



6. Fie $P(n)$ și $S(n)$ produsul, respectiv suma cifrelor numărului întreg n. De exemplu $P(23)=6$ și $S(23)=5$. Presupunem că N este un număr de două cifre astfel încât $N=P(N)+S(N)$. Care este cifra unităților numărului N?

(A) 2 (B) 3 (C) (D) 8 (E) 9

7. Când virgula unui anumit număr zecimal pozitiv este mutată cu patru poziții la dreapta, noul număr este de 4 ori inversul numărului inițial. Care a fost numărul inițial?

(A) 0,0002 (B) 0,002 (C) 0,02 (D) 0,2 (E) 2

8. Wanda, Darren, Beatrice și Chi sunt tutori la laboratorul de matematică al școlii. Serviciul lor este următorul: Darren din 3 în 3 zile (de școală), Wanda din 4 în 4 zile, Beatrice din 6 în 6 zile, iar Chi din 7 în 7 zile. Azi ei sunt toți în laborator. Peste câte zile de școală, începând de astăzi, vor fi ei iar toți deodată de serviciu în laborator?

(A) 42 (B) 84 (C) 126 (D) 178 (E) 252

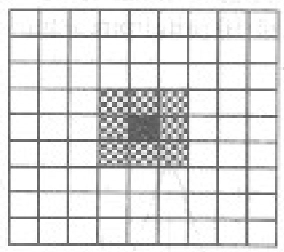
9. Impozitul pe venit ce se aplică acolo unde trăiește Kristin este de $p\%$ din venitul de până la 28000 dolari anual, plus $(p+2)\%$ din suma care depășește 28000 dolari. Kristin a observat că impozitul pe care l-a plătit a fost de $(p+0,25)\%$ din venitul său global anual. Cât de mare a fost acest venit?

(A) \$28000 (B) \$32000 (C) \$35000 (D) \$42000 (E) \$56000

10. Dacă x, y și z sunt pozitive și $xy=24$, $xz=48$ și $yz=72$, atunci $x+y+z$ este

(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 22 (E) 24

11. Considerăm pătratul închis la culoare într-o rețea de pătrate unitate, așa cum se vede în figură. Primul rând de pătrate din jurul celui din centru conține 8 pătrate unitate, al doilea rând conține 16 pătrate unitate. Dacă continuăm acest proces, numărul pătratelor unitate în al 100-lea rând este de



(A) 396 (B) 404 (C) 800 (D) 10000 (E) 10404

12. Presupunem că n este produsul a trei numere întregi consecutive și că n este divizibil cu 7. Care dintre următoarele nu este neapărat divizor al lui n?

(A) 6 (B) 14 (C) 21 (D) 28 (E) 42

13. Un număr de telefon are forma ABC-DEF-GHIJ, unde fiecare literă reprezintă o cifră diferită. Cifrele din fiecare parte a numărului sunt în ordine descrescătoare;

adică $A > B > C$, $D > E > F$ şi $G > H > I > J$. În plus, D, E şi F sunt cifre pare consecutive; G, H, I şi J sunt cifre impare consecutive; $A + B + C = 9$. Aflaţi A.

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 8

14. O asociaţie caritabilă vinde 140 bilete de binefacere în valoare de 2001 dolari. Unele bilete sunt vândute la preţul întreg (un număr întreg de dolari) iar restul sunt vândute la jumătate preţul. Câţi bani au fost obţinuţi din vânzarea biletelor care au fost vândute la preţul întreg?

(A) \$782 **(B)** \$986 **(C)** \$1158 **(D)** \$1219 **(E)** \$1449

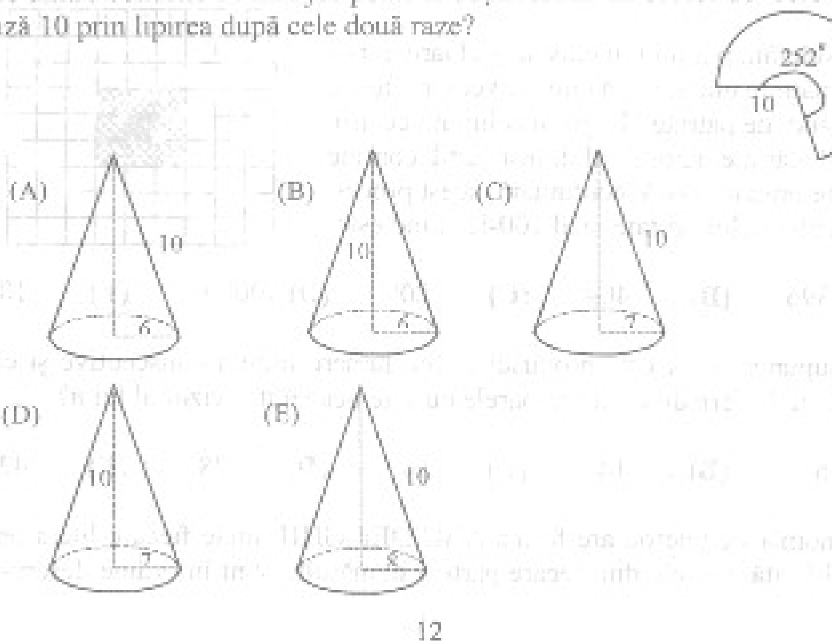
15. O stradă cu lăţimea 40 picioare are bordurile paralele. O trecere de pietoni mărginită de două dungi paralele traversează strada oblic. Lungimea bordurii între dungi are 15 picioare şi fiecare dungă are 50 picioare. Aflaţi distanţa, măsurată în picioare, dintre dungi.

(A) 9 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 15 **(E)** 25

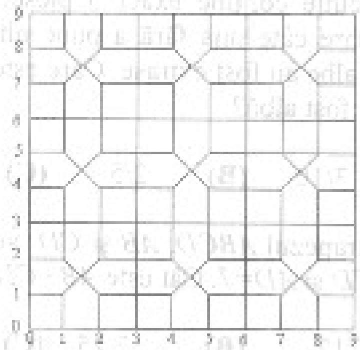
16. Media a trei numere este cu 10 mai mare decât cel mai mic dintre numere şi cu 15 mai mică decât cel mai mare. Mediana celor trei numere este 5. Cât este suma lor?

(A) 5 **(B)** 20 **(C)** 25 **(D)** 30 **(E)** 36

17. Care dintre conurile de mai jos poate fi obţinutdintr-un sector de cerc de 252^0 şi de rază 10 prin lipirea după cele două raze?



18. Planul este pavat cu pătrate congruente și pentagoane congruente, ca în figură. Procentul din plan acoperit de pentagoane este mai apropiat de



(A) 50 **(B)** 52 **(C)** 54 **(D)** 56 **(E)** 58

19. Pat dorește să cumpere 4 gogoși dintr-o ofertă de trei feluri: glazurate, cu ciocolată și cu zahăr praf. Câte alegeri distincte sunt posibile?

(A) 6 **(B)** 9 **(C)** 12 **(D)** 15 **(E)** 18

20. Un octogon regulat este obținut prin tăierea unor triunghiuri dreptunghice isoscele din colțurile unui pătrat de latură 2000. Care este lungimea laturii octogonului?

(A) 2000/3 **(B)** $2000(\sqrt{2}-1)$ **(C)** $2000(2-\sqrt{2})$ **(D)** 1000 **(E)** $1000\sqrt{2}$

21. Un cilindru circular drept având diametrul egal cu înălțimea este înscris într-un con circular drept. Conul are diametrul 10 și înălțimea 12, iar axele cilindrului și conului coincid. Aflați raza cilindrului.

(A) 8/3 **(B)** 30/11 **(C)** 3 **(D)** 25/8 **(E)** 7/2

22. În pătratul magic din figură, suma numerelor de pe fiecare linie, coloană și diagonală este aceeași. Cinci dintre aceste numere sunt notate cu v, w, x, y și z. Aflați $y+z$.

v	24	w
18	x	y
25	z	21

(A) 43 **(B)** 44 **(C)** 45 **(D)** 46 **(E)** 47

23. O cutie conține exact 5 piese, trei roșii și două albe. Acestea sunt scoase la întâmplare câte una fără a pune alta în loc până ce toate piesele roșii sau toate piesele albe au fost extrase. Care este probabilitatea ca ultima piesă extrasă în acest fel să fi fost albă?

(A) 3/10 **(B)** 2/5 **(C)** 1/2 **(D)** 3/5 **(E)** 7/10

24. În trapezul $ABCD$, AB și CD sunt perpendiculare pe AD, cu $AB + CD = BC$, $AB < CD$ și $AD=7$. Cât este $AB \cdot CD$?

(A) 12 **(B)** 12,25 **(C)** 12,5 **(D)** 12,75 **(E)** 13

25. Câte numere întregi pozitive ce nu depășesc pe 2001 și sunt multipli de 3 sau 4 dar nu și de 5, există?

(A) 768 **(B)** 801 **(C)** 934 **(D)** 1067 **(E)** 1167

3. Rezolvări și răspunsuri

1. **(E)** Numărul din mijlocul listei este $n+6$ și deci este egal cu 10. Astfel $n=4$ și cum suma numerelor este $9n+63=9\cdot 4+63=99$, media lor este $99/9=11$.

2. **(C)** Inversul lui x față de înmulțire este $1/x$, iar față de adunare este $-x$. Cum produsul lor este $(1/x)\cdot(-x)=-1$, rezultă $x=-1+2=1\in(0, 2]$.

3. **(E)** Fie a și b numerele. Suma este $2(a+3)+2(b+3)=2(a+b)+12=2S+12$.

4. **(E)** Cercul poate să intersecteze fiecare latură a triunghiului în cel mult 2 puncte, deci numărul cerut este 6.

5. **(D)** Șase dintre ele au cel puțin o axă de simetrie.

6. **(E)** Fie $N=10a+b$. Atunci $10a+b=ab+(a+b)$ și rezultă $9a=ab$, adică $b=9$.

7. **(C)** Mutarea cifrei lui x cu 4 poziții la dreapta, revine la a-l înmulți pe x cu 10000. Deci $10000x=4\cdot(1/x)$, care ne dă $x=2/100=0,02$.

8. **(B)** Numărul zilelor de școală până ce ei vor fi din nou de serviciu deodată este cel mai mic multiplu comun al numerelor 3, 4, 6 și 7, care este 84.

9. **(B)** Dacă venitul anual al lui Kristin este x 28000 dolari, atunci avem

$\frac{p}{100}\cdot 28000+\frac{p+2}{100}\cdot(x-28000)=\frac{p+0,25}{100}\cdot x$, ecuație din care obținem x=32000.

10. **(D)** Deoarece $x=\frac{24}{y}=\frac{48}{z}$, rezultă $z=2y$ și apoi $2y^2=72$, de unde $y=6$, $x=4$, $z=12$ și deci suma cerută este 22.

11. **(C)** Al n-lea rând conține $2(2n+1)+2(2n-1)=8n$ pătrate. Pentru n=100, obținem deci 800 pătrate.

12. **(D)** Printre oricare 3 numere consecutive se află unul par și unul divizibil cu 3. Deoarece produsul lor este divizibil și cu 7, numerele 6, 14, 21 și 42 vor fi divizori, dar nu și 28. Exemplu : 5·6·7 se divide cu 7 dar nu și cu 28.

13. **(E)** Ultimul grup este sau 9753 sau 7531 și cifra impară rămasă (1 sau 9) vor fi printre A, B sau C. Deoarece A+B+C=9, cifra impară dintre A, B, C este 1 și deci suma cifrelor pare din grupul ABC este 8. Cele trei cifre din DEF pot fi 864, 642 sau 420, ceea ce ne lasă respectiv perechile (2, 0), (8, 0), (8, 6) pentru grupul ABC. Doar perechea 8 și 0 are suma 8, deci ABC este 810, numărul este 810-642-9753 și prima cifră este deci 8.

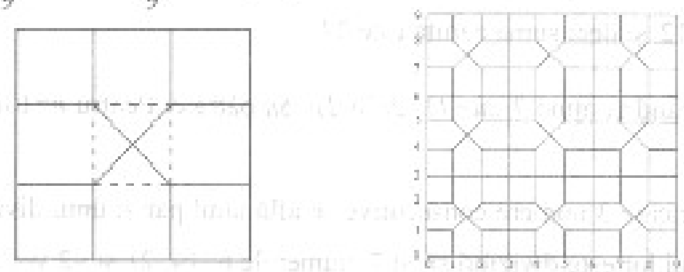
14. **(A)** Fie n numărul biletelor la preț întreg și p prețul unuia în dolari. Atunci $np+(140-n)\cdot\frac{p}{2}=2001 \Leftrightarrow p(n+140)=4002$. Astfel n+140 trebuie să dividă pe 4002=2·3·23·29. Deoarece $0\le n\le 140$, rezultă $140\le n+140\le 280$, singurul factor ce convine fiind 174=2·3·29, care ne dă n=34 și p=23.

15. **(C)** Trecerea de pietoni este un paralelogram cu baza de 15 picioare și înălțimea (lățimea drumului) de 40 picioare. Aria sa este 15 · 40 = 600. Aceeași arie poate fi calculată luând ca bază 50 picioare și atunci înălțimea va fi distanța dintre dungi. Distanța este deci 600 : 50 = 12 picioare.

16. **(D)** Mediana fiind 5, numerele scrise în ordine crescătoare sunt x, 5, y. Avem $\frac{x+y+z}{3}=x+10$ și $\frac{x+y+z}{3}+15=y$ de unde $x+y$=25 și suma este 30.

17. **(C)** Generatoarea conului este 10, raza sectorului de cerc, iar lungimea sectorului de cerc este 252/360 din lungimea cercului original, $2\pi \cdot 10$, adică 14π. Dacă r este raza conului avem $2\pi r = 14\pi$, care ne dă r=7.

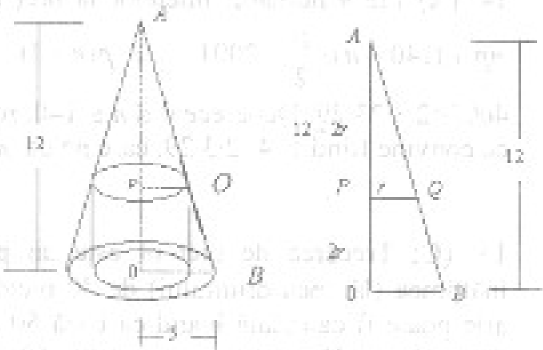
18. **(D)** Pavajul constă din lipirea repetată a rețelei din stânga. De fapt în enunțul problemei sunt ilustrate 9 repetări ale acesteia. Să observăm că 4 dintre cele 9 pătrate ale rețelei, nu sunt acoperite de cele 4 pentagoane. Procentul pentagoanelor este deci $\frac{5}{9}\cdot 100 = 55\frac{5}{9}$, mai apropiat fiind de 56.



19. **(D)** Numărul alegerilor posibile este egal cu numărul soluțiilor ecuației $g+c+p=4$, unde g, c și p reprezintă numărul de gogoși din cele trei feluri. Există 15 soluții: (4,0,0), (0,4,0), (0,0,4), (3,0,1), (0,3,1), (1,0,3), (0,1,3), (3,1,0), (1,3,0), (2,2,0), (2,0,2), (0,2,2), (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2).

20. **(B)** Fie x lungimea laturii octogonului, care este de fapt și lungimea ipotenuzei triunghiurilor decupate. Cateta are lungimea $x\sqrt{2}/2$ și atunci avem $2\cdot\frac{x\sqrt{2}}{2} + x = 2000$ de unde rezultă $x = \frac{2000}{\sqrt{2}+1} = 2000(\sqrt{2}-1)$.

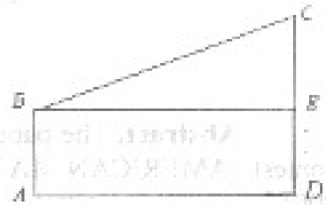
21. **(B)** Fie r raza cilindrului, atunci înălțimea sa este $2r$. Deoarece ΔAPQ este semenea cu ΔAOB, avem $\frac{12-2r}{r} = \frac{12}{5}$ de unde $r = \frac{30}{11}$.



22. **(D)** Deoarece v se află pe prima linie, pe prima coloană și pe diagonala principală, suma celorlalte două numere va fi aceeași: $25+18=24+w=21+x$

deci u=19 şi x=22. Astfel suma numerelor de pe diagonala secundară este 66 şi obţinem v=23, y=26 şi z=20. Prin urmare $y+z$=46.

23. **(D)** Există următoarele variante posibile (W=alb; R=red): RRRWW, RRWRW, RWRRW, WRRRW, RRWWR, RWRWR, WRRWR, RWWRR, WRWRR şi WWRRR. Doar ultimele 6 cazuri (din 10) sunt favorabile, deci probabilitatea cerută este 6/10=3/5.



24. **(B)** Fie E piciorul perpendicularei din B pe CD. Atunci $AB=DE$ şi $BE=AD=7$. Din teorema lui Pitagora

$$AD^2 BE^2 = BC^2 - CE^2 = (CD+AB)^2 - (CD-AB)^2 =$$
$$= (CD+AB+CD-AB)(CD+AB-CD+AB) =$$
$$= 4 \cdot CD \cdot AB, \text{ de unde}$$

$$AB \cdot CD = AD^2 / 4 = 49/4 = 12{,}25.$$

25. **(B)** Pentru întregii ce nu depăşesc pe 2001, există [2001/3]=667 multipli de 3 şi [2001/4]=500 multipli de 4. Printre aceste 1167 numere, se află şi cei [2001/12]=166 multipli de 12, deci există 1167-166=1001 multipli de 3 sau 4. Dintre aceştia, excludem pe cei [2001/15]=133 multipli de 15 şi pe cei [2001/20]=100 multipli de 20, deoarece aceştia sunt şi multipli de 5. În acest fel însă i-am exclus şi pe cei [2001/60]=33 multipli de 60, astfel că trebuie să-i renumărăm. Aşadar numărul cerut este 1001-133-100+33=801.

Bibliografie

1. American Mathematics Competitions: *Problems at 2nd Annual American Contest 10 (AMC 10), Tuesday, February 13, 2001*
2. American Mathematics Competitions: *Solutions Pamphlet for the 2nd AMC 10, Tuesday, February 13, 2001*
3. Vasile BERINDE: *Prima participare a elevilor din România la AMERICAN MATHEMATICS CONTESTS, Gazeta Matematică, Anul CVI(2001), nr. 7-8, 279-284*

THE PROBLEMS GIVEN AT "AMERICAN MATHEMATICS COMPETITIONS 10" FROM FEBRUARY 13, 2001

Abstract. The paper presents solutions to all the problems proposed at the contest "AMERICAN MATHEMATICS COMPETITIONS 10" from february 13, 2001.

Primit la redacţie: 01.02.2002

Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca
Str. M.Kogălniceanu Nr. 1, 3400 Cluj-Napoca,
ROMANIA
E-mail: madalina_berinde@personal.ro

Colegiul Naţional "Vasile Lucaciu"
Str. Culturii Nr.2, 4800 Baia Mare
ROMANIA
E-mail: abc_ruxy@yahoo.com