Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 11(2002), 31 - 42

PROBLEMELE PROPUSE LA IMC-9, VARŞOVIA, 19-25 IULIE 2002

Mădălina BERINDE şi Vasile BERINDE

1. Introducere

IMC reprezintă iniţialele primelor trei cuvinte din sintagma International Mathematics Competitions for University Students (Concursul Internaţional de Matematică pentru studenţi), concurs ajuns la ediţia a 9-a în anul 2002 şi găzduit, în perioada 19-25 iulie, de Universitatea din Varşovia. Primele 5 ediţii ale IMC au fost organizate în Bulgaria, a 6-a ediţie a avut loc la Balaton (Ungaria), a 7-a ediţie la Londra (Marea Britanie) iar a 8-a la Praga (Republica Cehă). Fiind organizat pentru studenţi, IMC diferă în mai multe privinţe de IMO (Olimpiada Internaţională de Matematică), organizat pentru elevii de liceu. La IMO reprezentarea este la nivelul unei ţări (o delegaţie de 6 elevi), pe când la IMC reprezentarea este la nivelul universităţilor, deşi în fapt studenţii concurează individual. Materia cerută la IMO acoperă materia de liceu până în clasa a X-a (în sistemul nostru vechi de învăţământ), în timp ce la IMC se propun probleme ce corespund în general materiei de liceu de la noi, cu câteva adaosuri privind algebra liniară, analiza şi analiza complexă, ce se predau în anul I la universitate. Diferenţe esenţiale există şi între modul de selecţie a problemelor la IMC faţă de IMO.

Problemele în cazul IMC nu trebuie să fie neapărat inedite, aşa cum se cere la IMO, în schimb ele trebuie să fie originale, adică să fie probleme de autor. Problemele propuse sunt repartizate, într-o primă fază, în trei categorii: propuse pentru concurs, probleme de rezervă şi probleme respinse. Totodată are loc împărţirea primelor două categorii în câte trei clase: probleme uşoare, probleme de nivel mediu şi probleme dificile. După ce problemele au fost astfel grupate, juriul, format din conducătorii delegaţiilor participante (un profesor de la fiecare universitate), votează pentru fiecare problemă în parte dacă rămâne, intră sau iese dintr-o anumită listă, în urma unei proceduri obositoare care, ca orice act democratic, nu duce întotdeauna la cel mai bun rezultat. Spre exemplu, la IMC-9 s-a obiectat de către multă lume, faptul că nu s-au dat suficient de multe probleme de algebră liniară, iar de combinatorică şi de analiză complexă nici una.

Concursul constă din două probe, fiecare cerând rezolvarea în 5 ore a 6 probleme (2 uşoare, 2 medii şi 2 dificile). Probele se planifică de regulă în 2 zile consecutive. Numerotarea problemelor pentru fiecare zi de concurs se face în ordinea crescătoare a nivelului de dificultate (problemele 1, 2 sunt mai uşoare, problemele 3 şi 4 de nivel mediu iar problemele 5 şi 6 sunt considerate cele mai dificile). Pentru fiecare problemă bine rezolvată se acordă 20 de puncte.

Dăm în continuare enunţul problemelor propuse la IMC-9. Problemele propuse la celelalte ediţii pot fi găsite la adresa http://www.imc-math.org, unde sunt prezentate şi alte informaţii legate de acest concurs.

2. Enunţul problemelor

Ziua întâi (21 iulie 2002)

Problema 1.1. Numim parabolă standard, graful unei funcţii polinomiale de gradul II de forma $y = x^2 + ax + b$. Trei parabole standard de vârfuri V_1, V_2, V_3 se intersectează două câte două în punctele A_1, A_2, A_3. Fie $A \mapsto s(A)$ reflexia planului în raport cu axa Ox. Demonstraţi că parabolele standard de vârfuri $s(A_1), s(A_2), s(A_3)$ se intersectează două câte două în punctele $s(V_1), s(V_2), s(V_3)$.

(Universitatea Columbia)

Problema 1.2. Există funcţii derivabile cu derivata continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$ să avem $f(x) > 0$ şi $f'(x) = f(f(x))$?

S. Gorovii

Problema 1.3. Fie n număr natural şi $a_k = \frac{1}{C_n^k}$, $b_k = 2^{k-n}$, $k = 1, 2, ..., n$.

Arătaţi că $$\frac{a_1 - b_1}{1} + \frac{a_2 - b_2}{2} + ... + \frac{a_n - b_n}{n} = 0.$$

V. Berinde, Gazeta Matematică

Problema 1.4. Fie $f : [a,b] \to [a,b]$ o funcţie continuă şi $p \in [a,b]$. Definim $p_0 = p$ şi $p_{n+1} = f(p_n)$ pentru $n = 0, 1, 2, ...$. Presupunem că mulţimea $T_p = \{p_n : n = 0, 1, 2, ...\}$ este închisă, adică dacă $x \notin T_p$ atunci există un $\delta > 0$ astfel ca pentru toţi $x' \in T_p$ să avem $|x' - x| \geq \delta$. Demonstraţi că T_p este finită.

M. Krych

Problema 1.5. Demonstrați sau contraziceți următoarele afirmații

a) Există o funcție monotonă $f:[0,1]\to[0,1]$ astfel încât pentru orice $y\in[0,1]$ ecuația $f(x)=y$ are o mulțime nenumărabilă de soluții x;

b) Există o funcție derivabilă cu derivata continuă $f:[0,1]\to[0,1]$ astfel încât pentru orice $y\in[0,1]$ ecuația $f(x)=y$ are o mulțime nenumărabilă de soluții x.

M. Krych

Problema 1.6. Pentru orice matrice pătratică de ordinul n, M cu elemente reale fie $\|M\|=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\dfrac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2}$, unde $\|\cdot\|_2$ desemnează norma euclidiană din $\mathbb{R}^n$. Presupunem că o matrice A cu elemente reale satisface condiția $\|A^k-A^{k-1}\|<\dfrac{1}{2002k}$ pentru orice $k\in\mathbb{N}$. Arătați că $\|A^k\|<\dfrac{1}{2002k}$, pentru orice k.

K. Oleszkiewicz

Ziua a doua (22 iulie 2002)

Problema 2.1. Calculați determinantul matricii pătratice $n\times n$, $A=[a_{ij}]$,

$$a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{|i-j|}, & \text{dacă } i\neq j\\ 2, & \text{dacă } i=j\end{cases}$$

V. Berinde

Problema 2.2. 200 de studenți participă la un concurs de matematică care cere rezolvarea a 6 probleme. Se știe că fiecare problemă a fost rezolvată corect de cel puțin 120 participanți. Arătați că există doi participanți astfel încât fiecare problemă să fi fost rezolvată de cel puțin unul dintre ei.

V. Pop

Problema 2.3. Pentru $n\geq 1$ fie $a_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{k^n}{k!}$, $b_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{k^n}{k!}$.

Arătați că $a_n\cdot b_n$ este număr întreg.

A. Epstein

Problema 2.4. În tetraedrul $OABC$, fie $m(\sphericalangle BOC)=\alpha$, $m(\sphericalangle COA)=\beta$ şi $m(\sphericalangle AOB)=\gamma$. Fie σ măsura unghiului dintre feţele OAB şi OAC şi τ măsura unghiului dintre feţele OBA şi OBC. Arătaţi că $\gamma>\beta\cdot\cos\sigma+\alpha\cdot\cos\tau$.

G. Kos

Problema 2.5. Fie A o matrice $n\times n$ cu elemente complexe, cu $n>1$. Demonstraţi că

$$A\overline{A}=I_n \Leftrightarrow \exists S\in GL_n(\mathbb{C}) \text{ a.î } A=S\overline{S}^{-1}$$

(Dacă $A=[a_{ij}]$ atunci $\overline{A}=[\overline{a_{ij}}]$, unde $\overline{a_{ij}}$ reprezintă conjugatul numărului complex a_{ij}; $GL_n(\mathbb{C})$ reprezintă mulţimea matricilor inversabile $n\times n$ cu elemente complexe iar I_n este matricea unitate).

M. Omarjee

Problema 2.6. Fie $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ o funcţie convexă al cărei gradient $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ există în orice punct din $\mathbb{R}^n$ şi satisface condiţia: $\exists L>0$ a. î. $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$

$$\|\nabla f(x_1)-\nabla f(x_2)\|\le L\|x_1-x_2\|.$$

Demonstraţi că $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$, $\|\nabla f(x_1)-\nabla f(x_2)\|^2\le L\langle\nabla f(x_1)-\nabla f(x_2),x_1-x_2\rangle$ unde $\langle a,b\rangle$ reprezintă produsul scalar al vectorilor a şi b.

M. Balashov

3. Rezolvarea problemelor

Problema 1.1.

Demonstrăm mai întâi că parabola standard de vârf V conţine punctul A dacă şi numai dacă parabola standard de vârf $s(A)$ conţine vârful $s(V)$. Fie pentru aceasta $A=(a,b)$ şi $V=(v,w)$. Ecuaţia parabolei standard de vârf $V=(v,w)$ este $y=(x-v)^2+w$. În mod asemănător, parabola standard de vârf $s(A)=(a,-b)$ este $y=(x-a)^2-b$. Ea conţine punctul $s(V)=(v,-w)$ dacă şi numai dacă $-w=(v-a)^2-b\Leftrightarrow b=(a-v)^2+w$. Mai departe, presupunem că parabolele standard de vârfuri V_1 şi V_2, V_1 şi V_3, V_2 şi V_3 se intersectează în punctele A_3,A_2,A_1, respectiv. Atunci parabolele standard de vârfuri $s(A_1)$ şi

$s(A_2)$, $s(A_1)$ şi $s(A_3)$, respectiv $s(A_1)$ şi $s(A_2)$ se intersectează în punctele V_3, V_2 şi V_1, respectiv, pentru că ele conţin aceste puncte.

Problema 1.2.

Presupunem prin absurd că ar exista o astfel de funcţie. Atunci deoarece $f'(x) = f(f(x)) > 0$, funcţia f este strict crescătoare. Din monotonie, $f(x) > 0$ implică $f(f(x)) > f(0)$ pentru orice x. Astfel $f(0)$ este o margine inferioară pentru $f'(x)$.

Aplicăm teorema lui Lagrange: $f(x) - f(0) = f'(\xi)\cdot(x-0)$ şi cum $f'(\xi) > f(0) \Rightarrow x\cdot f'(\xi) < x\cdot f(0)$, pentru $x<0$ şi atunci pentru $x<0 \Rightarrow f(x) < f(0) + x\cdot f(0) = (1+x)f(0)$, de unde, pentru $x \le -1$ ar rezulta $f(x) \le 0$, contradicţie. Aşadar nu există o funcţie cu proprietatea cerută.

Observaţie. Raţionamentul şi concluzia rămân valabile pentru condiţia mai generală $f(x) > 0$ şi $f'(x) \ge f(f(x))$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Problema 1.3.

Deoarece $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, $k \ge 1$, relaţia din enunţ se scrie sub forma

$$\frac{2^n}{n}\left[\frac{1}{C_{n-1}^0} + \frac{1}{C_{n-1}^1} + \ldots + \frac{1}{C_{n-1}^{n-1}}\right] = \frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^n}{n},$$

Demonstrăm această egalitate prin inducţie. Pentru $n=1$ avem $2 = 2^1$, adevărat. Presupunem relaţia adevărată pentru n şi fie

$$x_n = \frac{2^n}{n}\left[\frac{1}{C_{n-1}^0} + \frac{1}{C_{n-1}^1} + \ldots + \frac{1}{C_{n-1}^{n-1}}\right].$$

Atunci
$$x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k} = \frac{2^n}{n+1}\left[1 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{C_n^k} + \frac{1}{C_n^{k+1}}\right) + 1\right] =$$

$$= \frac{2^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{n-k}{n} + \frac{k+1}{n}}{C_{n-1}^k} + \frac{2^{n+1}}{n+1} = \frac{2^n}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{C_{n-1}^k} + \frac{2^{n+1}}{n+1} = x_n + \frac{2^{n+1}}{n+1}$$

ceea ce arată că egalitatea din enunţ are loc şi pentru $n+1$, q. e. d.

Problema 1.4.

Dacă pentru un $n > m$ avem $p_m = p_n$, atunci T_p este finită (şirul este periodic). Presupunem aşadar că toţi termenii şirului $p_0, p_1, \ldots$ sunt distincţi. Şirul (p_n) fiind mărginit, există un subşir convergent al său, (p_{n_k}), şi pentru că T_p este închisă, $\lim_{k\to\infty} p_{n_k} = q \in T_p$. Deoarece f este continuă avem $p_{n_k+1} = f(p_{n_k}) \to f(q)$, ceea ce arată că termenii şirului (p_n) cu excepţia unui număr finit, sunt puncte de acumulare ale mulţimii T_p. Putem deci presupune că toţi termenii şirului sunt puncte de acumulare ale lui T_p. Fie $d = \sup\{|p_m - p_n| / m, n \geq 0\}$ şi fie (δ_n) astfel încât

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n < \frac{d}{2}.$$

Dacă I_n este intervalul de lungime δ_n centrat în p_n, atunci pentru orice n există o infinitate de numere k astfel încât $p_k \notin \bigcup_{j=0}^{n} I_j$. Fie $n_0 = 0$ şi n_{m+1} este cel mai mic întreg $k > n_m$ cu proprietatea că $p_k \notin \bigcup_{j=0}^{n_m} I_j$. Deoarece T_p este închisă, limita subşirului (p_{n_m}) trebuie să fie în T_p ceea ce nu este posibil, datorită definiţiei intervalelor I_n. Dacă şirul p_{n_m} nu este convergent, îl putem înlocui cu un subşir convergent al său.

Problema 1.5.

a) Răspunsul este negativ. Pentru fiecare y, mulţimea $\{x \in [0,1] / y = f(x)\}$ este fie vidă, fie constă dintr-un singur punct, fie este un interval. Aceste trei tipuri de mulţimi sunt două câte două disjuncte, deci există cel mult o mulţime numărabilă de mulţimi de al treilea tip.

b) Fie f o astfel de funcţie. Atunci pentru orice y din $\operatorname{Im} f$ există x_0 astfel încât $y = f(x_0)$ şi $f'(x_0) = 0$, deoarece mulţimea nenumărabilă $\{x \in [0,1] / y = f(x)\}$ conţine un punct de acumulare x_0 pentru care avem în mod evident $f'(x_0) = 0$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice x_0 cu proprietatea $f'(x_0) = 0$, există un interval deschis I_{x_0} astfel încât pentru $x \in I_{x_0}$ să avem $|f'(x)| < \varepsilon$. Reuniunea tuturor acestor intervale poate fi scrisă ca o reuniune de intervale deschise I_k două câte două disjuncte. Imaginea fiecărui interval I_n este un interval (sau un punct) de lungime $< \varepsilon \cdot l(I_k)$, din teorema lui Lagrange. Astfel imaginea intervalului $[0,1]$ poate fi acoperită cu intervale astfel încât suma lungimilor lor să fie $\varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$. Dar acest lucru nu este posibil pentru că $\varepsilon < 1$. Răspunsul este tot negativ.

CUPRINS

Observație. Dacă se cere ca f să fie numai continuă, o astfel de funcție există (spre exemplu prima coordonată a curbei lui Peano, care transformă continuu un interval într-un pătrat.

Problema 1.6.

Demonstrăm mai întâi două leme

Lema 1. *Fie* $(a_n)_{n\ge 0}$ *un șir de numere nenegative astfel încât*

$a_{2k}-a_{2k+1}\le a_k^2$, $a_{2k+1}-a_{2k+2}\le a_k a_{k+1}$, *pentru orice* $k\ge 0$ *și* $\limsup n\,a_n<\dfrac{1}{4}$.

Atunci $\limsup \sqrt[n]{a_n}<1$.

Demonstrație. Fie $c_l=\sup_{n\ge 2^l}(n+1)a_n$, pentru $l\ge 0$. Vom arăta că $c_{l+1}\le 4c_l^2$. Într-adevăr, pentru orice $n\ge 2^{l+1}$ există un întreg $k\ge 2^l$ astfel încât $n=2k$ sau $n=2k+1$. În primul caz există

$$a_{2k}-a_{2k+1}\le a_k^2\le \frac{c_l^2}{(k+1)^2}\le \frac{4c_l^2}{2k+1}-\frac{4c_l^2}{2k+2}$$

în timp ce, în al doilea caz, există

$$a_{2k+1}-a_{2k+2}\le a_k\,a_{k+1}\le \frac{c_l^2}{(k+1)(k+2)}\le \frac{4c_l^2}{2k+2}-\frac{4c_l^2}{2k+3}.$$

Prin urmare șirul $\left(a_n-\dfrac{4c_l^2}{n+1}\right)_{n\ge 2^{l+1}}$ este nedescrescător și termenii săi sunt negativi deoarece el converge la zero. Prin urmare, $a_n\le \dfrac{4c_l^2}{n+1}$ pentru $n\ge 2^{l+1}$, ceea ce înseamnă că $c_{l+1}^2\le 4c_l^2$. Aceasta implică faptul că șirul $((4c_l)^{2^{-l}})_{l\ge 0}$ este necrescător și prin urmare mărginit la dreapta de un număr $q\in(0,1)$, întrucât toți termenii săi, cu excepția unui număr finit, sunt strict mai mici ca 1. Prin urmare $c_l\le q^{2^l}$, pentru l suficient de mare. Atunci, pentru orice n între 2^l și 2^{l+1} există $a_n\le \dfrac{c_l}{n+1}\le q^{2^l}\le(\sqrt{q})^n$ ceea ce conduce la $\limsup\sqrt[n]{a_n}\le\sqrt{q}<1$, q. e. d.

Lema 2. *Fie* $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *o aplicație liniară.*

Dacă $\limsup\left\|T^{n+1}-T^n\right\|<\dfrac{1}{4}$, *atunci* $\limsup\left\|T^{n+1}-T^n\right\|^{1/n}<1$. *În particular* T^n *converge în normă și* T^n *este mărginit.*

Rezolvarea problemei. Fie $a_n=\left\|T^{n+1}-T^n\right\|$. Avem

$$T^{k+m+1}-T^{k+m}=(T^{k+m+2}-T^{k+m+1})-(T^{k+1}-T^k)(T^{m+1}-T^m)$$

ceea ce implică $a_{k+m} \le a_{k+m-1} + a_k a_m$. Şirul (a_n) satisface condiţia din Lema 1 şi atunci rezultă Lema 2.

Observaţii. 1) Rezultatul din problema 6 rămâne valabil pentru un operator $T : X \to X$, în care X este un spaţiu normat nu neapărat finit dimensional.

2) Constanta $\frac{1}{4}$ din Lema 1 nu poate fi înlocuită cu un număr mai mare, deoarece şirul $a_n = \frac{1}{4n}$ satisface inegalitatea $a_{k+m} - a_{k+m-1} \le a_k a_m$ pentru orice k şi m dar el nu are descreştere exponenţială.

3) Constanta $\frac{1}{4}$ din Lema 2 nu poate fi înlocuită cu nici un număr mai mare decât $1/e$. Spre exemplu, dacă luăm operatorul $(Tf)(x) = x f(x)$ pe $L^2[0,1]$, se poate arăta că $\limsup \left\| T^{n+1} - T^n \right\| = \frac{1}{e}$, câtă vreme T^n nu converge în normă operaţională. Totuşi, problema dacă în general $\limsup n \left\| T^{n+1} - T^n \right\| < \infty$ implică faptul că T^n este mărginit, rămâne deschisă.

Problema 2.1.
Fie $d_n = \det A$. Avem

$$d_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & \dots \\ 1 & -1 & 2 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+1 & -1 & 1 & \dots \\ 0-1 & 2 & -1 & \dots \\ 0+1 & -1 & 2 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots \\ 0 & 2 & -1 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & \dots \\ 1 & -1 & 2 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix} = 1 \cdot d_{n-1} + d'.$$

Calculăm d' astfel: adunăm c_{n-1} la c_n, apoi c_{n-2} la c_{n-1} ş. a. m. d. Obţinem astfel un determinant care are partea de deasupra diagonalei nulă, iar pe diagonala principală elemente egale cu 1. Aşadar $d' = 1$ şi deci $d_n = d_{n-1} + 1$, $n \ge 1$ şi cum $d_1 = 2$ rezultă $d_n = n + 1$, $n \ge 1$.

Problema 2.2.
Pentru fiecare pereche de studenţi considerăm mulţimea acelor probleme pe care nici unul dintre ei nu le-a rezolvat. Există în total $C_{200}^2 = 19900$ astfel de mulţimi.

Trebuie să demonstrăm că cel puțin una dintre aceste mulțimi este vidă. Pentru fiecare problemă, există cel mult 80 de studenți care nu au rezolvat-o. Dintre aceștia putem avea cel mult $C_{80}^2 = 3160$ perechi, astfel că o problemă poate aparține la cel mult 3160 mulțimi. Toate cele 6 probleme pot aparține la cel mult $8 \cdot 3160 = 18960$ mulțimi. Așadar cel puțin $19900 - 18960 = 940$ mulțimi sunt nevide.

Problema 2.3.

Demonstrăm prin inducție după n că a_n / e și b_n / e sunt întregi. Presupunem $n=1$, $a_1 = e$ și $b_1 = e^{-1}$ (pentru $n=0$, facem convenția $0^0 = 1$). Presupunem că $a_0, a_1, \ldots, a_n$ și $b_0, b_1, \ldots, b_n$ sunt multipli de e, respectiv $\frac{1}{e}$, pentru un anumit $n \geq 1$. Atunci

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{n+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{n+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{(k-1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)^n}{l!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^n}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{k^i}{k!} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^i}{k!} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a_i .$$

Analog

$$b_{n+1} = -\sum_{i=0}^{n} C_n^i b_i ,$$

ceea ce arată că a_{n+1} și b_{n+1} sunt combinații liniare ale termenilor precedenți, de unde rezultă concluzia pentru $n+1$.

Problema 2.4.

Putem lua $OA = OB = OC = 1$.

Intersecția sferei de rază 1 cu domeniile unghiulare AOB, BOC și COA vor fi niște "felii" de arie $\frac{1}{2}\gamma$, $\frac{1}{2}\alpha$ și respectiv $\frac{1}{2}\beta$. Proiectăm feliile AOC și COB pe planul OAB și notăm cu C' proiecția vârfului C, iar cu A' și B' simetricele punctelor A și B în raport cu O, respectiv. Prin proiecție $OC' < 1$. Proiecțiile arcelor AC și BC sunt segmente de elipse cu axele AA' și BB', respectiv (aceste elipse pot fi degenerate când σ și τ sunt unghiuri drepte). Cele două elipse se intersectează în 4 puncte, amândouă semielipsele ce leagă A și A' intersectează ambele semielipse ce leagă pe B și B'. Nu mai există alte puncte de intersecție pentru că suntem în cazul conicelor. Ariile orientate ale proiecțiilor feliilor AOC și COB sunt $\frac{1}{2}\alpha\cos\tau$ și $\frac{1}{2}\beta\cos\sigma$, respectiv.

Enunțul problemei exprimă faptul că suma acestora este mai mică decât aria feliei BOA.

Există trei cazuri esențial distincte în raport cu semnul funcțiilor $\cos\sigma$ și $\cos\tau$. Dacă ambele sunt pozitive, atunci proiecțiile OAC și OBC sunt submulțimi ale lui OBC, fără puncte interioare comune și ele nu acoperă întreaga felie OBC, ceea ce demonstrează afirmația. În celelalte două cazuri, cel puțin un semn este negativ iar proiecțiile cu semn pozitiv sunt incluse în felia OBC.

Problema 2.5.

Implicația "$\Leftarrow$" este banală căci dacă $A = S\overline{S}^{-1}$ atunci $A\overline{A} = S\overline{S}^{-1}\cdot\overline{S}S^{-1} = I_n$.

Pentru cealaltă implicație, trebuie să arătăm că există o matrice inversabilă S astfel încât $A\overline{S} = S$.

Fie w un număr complex nenul oarecare și fie $S = wA + \overline{w}I_n$. Atunci $A\overline{S} = A(\overline{w}\overline{A} + wI_n) = \overline{w}I_n + wA = S$. Dacă S este singulară atunci $\frac{1}{w}S = A - (\overline{w}/w)I_n$ este de asemenea singulară, deci $\overline{w}/w$ este o valoare proprie a lui A. Deoarece A are un număr finit de valori proprii și $\overline{w}/w$ poate fi luat pe cercul unitate, întotdeauna vom găsi un w astfel încât S să fie nesingulară.

Problema 2.6.

Fie $g(x) = f(x) - f(x_1) - \langle \nabla f(x_1), x - x_1 \rangle$. Este clar că g are aceleași proprietăți ca și f. Mai mult, $g(x_1) = \nabla g(x_1) = 0$ și deci, datorită convexității, g are în x_1 valoare minimă absolută 0. Arătăm acum că

$$g(x_2) \ge \frac{1}{2L}\|\nabla g(x_2)\|^2. \qquad (1)$$

Pentru aceasta fie $y_0 = x_2 - \frac{1}{L}\nabla g(x_2)$ și $y(t) = y_0 + t(x_2 - y_0)$. Atunci

$$g(x_2) = g(y_0) + \int_0^1 \langle \nabla g(y(t)), x_2 - y_0 \rangle dt =$$

$$= g(y_0) + \langle \nabla g(x_2), x_2 - y_0 \rangle - \int_0^1 \langle \nabla g(x_2) - \nabla g(y(t)), x_2 - y_0 \rangle dt \ge$$

$$\ge 0 + \frac{1}{L}\|\nabla g(x_2)\|^2 - \int_0^1 \|\nabla g(x_2) - \nabla g(y(t))\| \cdot \|x_2 - y_0\| dt \ge$$

$$\ge \frac{1}{L}\|\nabla g(x_2)\|^2 - \|x_2 - y_0\| \int_0^1 L\|x_2 - y(t)\| dt =$$

$$=\frac{1}{L}\cdot\|\nabla g(x_2)\|^2 - L\|x_2-y_0\|^2\int_0^1(1-t)\,dt=\frac{1}{2L}\|\nabla g(x_2)\|^2.$$

Aşadar, din (1) obţinem

$$f(x_2)-f(x_1)-<\nabla f(x_1),x_2-x_1>\ \ge \frac{1}{2L}\|\nabla f(x_2)-\nabla f(x_1)\|^2,$$

adică

$$\|\nabla f(x_2)-\nabla f(x_1)\|^2\le 2L<\nabla f(x_1),x_1-x_2>+2L(f(x_2)-f(x_1)).$$

Schimbând pe x_1 cu x_2, vom avea

$$\|\nabla f(x_2)-\nabla f(x_1)\|^2\le 2L<\nabla f(x_2),x_2-x_1>+2L(f(x_1)-f(x_2))$$

şi făcând media ultimelor două inegalităţi obţinem tocmai problema 6.

4. Concluzii finale

La IMC-9 au participat 182 studenţi din 24 de ţări, care au reprezentat 45 de universităţi din Europa, Asia, America de Sud şi America Centrală.

România a fost reprezentată de 10 studenţi de la 3 universităţi: "Babeş-Bolyai" Cluj - Napoca (4 studenţi), Universitatea Tehnică Cluj-Napoca (5 studenţi) şi Universitatea din Baia Mare (1 student).

Cea mai numeroasă delegaţie a fost cea a Ucrainei cu 17 studenţi, proveniţi de la 4 universităţi, fiind urmată de cea a Iranului (16 studenţi, de la 4 universităţi).

Marele premiu a fost obţinut de Ivan Losev (Belarus), cu 196 de puncte (din 240 posibile), care ca elev de liceu, a făcut parte de 4 ori din echipa ţării sale la OIM.

Studentul român cu cea mai bună poziţie în clasamentul individual a reprezentat Ecole Politechnique (Paris). De altfel majoritatea studenţilor care au reprezentat Franţa (Ecole Normale Superieure şi Ecole Politechnique) erau români. Mai mult chiar, lotul Universităţii Princeton (între primele 5 universităţi din SUA), care până la urmă nu a venit la Varşovia, era format numai din români (se pare că acesta a fost unul dintre motivele pentru care conducerea universităţii nu a aprobat deplasarea lor la IMC-9). Deşi acest lucru poate fi considerat măgulitor pentru România, totuşi trebuie spus că fenomenul migrării în masă a celor mai buni foşti olimpici este caracteristic ţării noastre. Pentru celelalte ţări est-europene cu şcoală matematică puternică şi cu tradiţie în concursurile de matematică (Bulgaria, Ungaria, Ucraina, Rusia etc.) acest fenomen fie nu există, fie are proporţii mai puţin îngrijorătoare.

Acest lucru este perfect explicabil, după participarea la IMC-8 (Praga, 2001) şi IMC-9 (Varşovia, 2002), ocazii cu care am putut să vedem cât de mare atenţie acordă guvernele acestor ţări învăţământului şi cercetării ştiinţifice, cât de multe fonduri sunt alocate acestor domenii şi, mai ales, cât de multe investiţii s-au făcut în ultimii 10-12 ani în dotarea laboratoarelor, cabinetelor cadrelor didactice, căminelor studenţeşti etc. Aceasta fără a mai ţine seama de nivelul de salarizare a cadrelor didactice şi de alte facilităţi oferite studenţilor din aceste ţări şi din altele aflate în fruntea aderării la UE.

Bibliografie

1. Berinde, V., Explorare, investigare şi descoperire în matematică, Editura Efemeride, 2001
2. Berinde, V., *On an inverse Pascal's triangle rule,* Mathematics Competitions, 2003 (va apărea)

THE PROBLEMS GIVEN AT IMC-9, WARSAW, JULY 19-25, 2002

Abstract. We present the problems given at IMC-9, Warsaw, July 19-25, 2002, followed by solutions and some comments. The note could be useful to those students who intend to train themselves for the mathematics competitions for university students.

Primit la redacţie: 10.12.2002

Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca
Str. Kogălniceanu nr. 1, 3400 Cluj-Napoca, ROMANIA
E-mail: madalina_berinde@personal.ro

Universitatea de Nord Baia Mare
Facultatea de Ştiinţe
Departamentul de Matematică şi Informatică
Str. Victoriei 76, 4800 Baia Mare, ROMANIA
E-mail: vberinde@ubm.ro