Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 11(2002), 51 - 57

DESPRE CÂTEVA FORMULE DE RECURENȚĂ

Andrei HORVAT - MARC

În acest articol vom stabili câteva formule de recurență pentru integrale de tipul

$$I_n = \int \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^n dx, x \in D, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

unde $D \subset \mathbb{R}$ este un interval, iar $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcție care verifică ecuația diferențială

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0, \quad x \in D \tag{2}$$

cu $a, b \in \mathbb{R}$.

Teorema 1. *Considerăm $D \subset \mathbb{R}$ un interval și $a, b \in \mathbb{R}$. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o soluție a ecuației diferențiale*

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0, \ x \in D$$

astfel încât $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in D$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ considerăm integralele

$$I_n = \int \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^n dx, \quad x \in D.$$

Are loc relația de recurență

$$I_n = \frac{1}{1-n} \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^{n-1} - aI_{n-1} - bI_{n-2}, \ x \in D, \quad n \geq 2 \tag{3}$$

cu

$$I_0 = \int dx = x + \mathscr{C} \tag{4}$$

$$I_1=\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+\mathscr{C} \qquad (5)$$

Demonstrație. Fie $n\geq 2$. Prin derivare obținem

$$\left(\frac{1}{1-n}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^{n-1}\right)'=-\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^{n-2}\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}$$

Deoarece, conform (2) avem $f''(x)=-af'(x)-bf(x)$ pentru orice $x\in D$, rezultă

$$\left(\frac{1}{1-n}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^{n-1}\right)'=-\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^{n-2}\frac{-af'(x)f(x)-bf^2(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}$$

$$=\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^{n}+a\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^{n-1}+b\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^{n-2}$$

pentru orice $x\in D$. Deci

$$\frac{1}{1-n}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^{n-1}-aI_{n-1}-bI_{n-2}=I_n\text{, pentru orice } x\in D \text{ și } n\geq 2.$$

Observație. Pentru $n\geq 2$, în integralele (1) efectuăm schimbarea de variabilă $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=t$. Atunci

$$\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{(f(x))^2}dx=dt.$$

Ținând cont de relația (2), obținem

$$dx=-\frac{dt}{t^2+at+b}.$$

Astfel, integralele I_n se transformă în

$$J_n=-\int\frac{t^n}{t^2+at+b}dt,\ t\in D_t,\ n\geq 2,$$

unde D_t este noul domeniu. În continuare, efectuând împărțirea sub semnul integralei, obținem

$$J_n=-\int\left(t^{n-2}-a\cdot\frac{t^{n-1}}{t^2+at+b}-b\cdot\frac{t^{n-2}}{t^2+at+b}\right)dt,\ n\geq 2,$$

adică

$$J_n = -\int t^{n-2} dt - aJ_{n-1} - bJ_{n-2},\ n \geq 2.$$

Deci obținem din nou relația de recurență

$$I_n = \frac{1}{1-n}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^{n-1} - aI_{n-1} - bI_{n-2},\ x \in D,\ n \geq 2,$$

cu I_0 și I_1 date de (4), respectiv (5).

Referitor la integralele definite

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{ax^2+bx+c}dx,\ n \in \mathbb{N}$$

stabilim următorul rezultat:

Teorema 2. *Se consideră integralele definite*

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{ax^2+bx+c}dx,\ \ n \in \mathbb{N}$$

unde $a,b,c \in \mathbb{R}$ astfel încât $ax^2+bx+c>0$ pentru orice $x \in [0,1]$.

Atunci

i) *șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător*

ii) *are loc relația de recurență*

$$aI_{n+2} + bI_{n+1} + cI_n = \frac{1}{n+1},\ n \in IN \tag{6}$$

iii) *au loc următoarele inegalități*

$$I_{n+2} \leq \frac{1}{(n+1)(a+b+c)} \leq I_n,\ n \in IN$$

$$\frac{1}{(n+1)(a+b+c)} \leq I_n \leq \frac{1}{(n-1)(a+b+c)},\ n \geq 2$$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{a+b+c}.$

Demonstrație. *i)* Avem

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{ax^2+bx+c}dx,\ n \geq 1.$$

Pentru $x \in [0,1]$ rezultă $\frac{x^n(x-1)}{ax^2+bx+c} \leq 0$. Atunci $I_{n+1} \leq I_n$ pentru orice $n \geq 1$.

ii) $aI_{n+2} = \int_0^1 \left(x^n - b\cdot\frac{x^{n+1}}{ax^2+bx+c} - c\cdot\frac{x^n}{ax^2+bx+c}\right)dx$

Rezultă

$$aI_{n+2} + bI_{n+1} + cI_n = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

iii) Deoarece $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ pentru orice $n \geq 1$, din relația (6), prin minorare cu I_{n+2} rezultă $(a+b+c)I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1}$, iar prin majorare cu I_n rezultă $\frac{1}{n+1} \leq (a+b+c)I_n$. Deci

$$I_{n+2} \leq \frac{1}{(n+1)(a+b+c)} \leq I_n,\ n \geq 1.$$

Pentru $n := n-2$, prima inegalitate devine

$$I_n \leq \frac{1}{(n-1)(a+b+c)},\ n \geq 2.$$

Așadar, pentru I_n avem

$$\frac{1}{(n+1)(a+b+c)} \leq I_n \leq \frac{1}{(n-1)(a+b+c)},\ n \geq 2.$$

iv) Înmulțim cu n

$$\frac{n}{(n+1)(a+b+c)} \leq nI_n \leq \frac{n}{(n-1)(a+b+c)},\ n \geq 2.$$

Trecem la limită când $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(a+b+c)} \leq \lim_{n\to\infty} nI_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n-1)(a+b+c)}.$$

Conform "lemei cleștelui" obținem $\lim_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{a+b+c}$.

În continuare prezentăm câteva aplicații ale Teoremei 1.

1. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ două numere reale, $\alpha \neq 0$. Avem

$$\int \left(\frac{\alpha}{\alpha x + \beta}\right)^n dx = \frac{\alpha^{n-1}}{1-n} \cdot \frac{1}{(\alpha x + \beta)^{n-1}} + \mathscr{C},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\},\ n \geq 2.$$

Dacă în (2) $a = b = 0$, obținem ecuația diferențială

$$f''(x) = 0,\ x \in D.$$

O soluție a acestei ecuații este funcția $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\beta}{\alpha}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x + \beta$.

Conform Teoremei 1, avem

$$I_n = \int\left(\frac{\alpha}{\alpha x+\beta}\right)^n dx = \frac{\alpha^{n-1}}{1-n}\cdot\frac{1}{(\alpha x+\beta)^{n-1}} + \mathscr{C}, \quad n \geq 2.$$

2. Pentru integralele

$$I_n = \int\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^n dx, \ x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}$$

are loc relația de recurență

$$I_n = \frac{1}{1-n}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^{n-1} + I_{n-2}, \ x \in \mathbb{R}, \ n \geq 2$$

unde $I_0 = x + \mathscr{C}$, $I_1 = \ln(e^x + e^{-x}) + \mathscr{C}$.

Dacă în (2) $a = 0$ și $b = -1$, avem ecuația diferențială

$$f''(x) = f(x), \ x \in D.$$

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + e^{-x}$ este o soluție a acestei ecuații. Conform Teoremei 1, obținem relația de recurență

$$I_n = \frac{1}{1-n}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^{n-1} + I_{n-2}, \ x \in \mathbb{R}, \ n \geq 2$$

3. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ două numere reale, $\alpha \neq 0$. Avem

$$I_n = \int\left(\frac{\alpha e^x}{\alpha e^x + \beta}\right)^n dx = \ln|\alpha e^x + \beta| - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\left(\frac{\alpha e^x}{\alpha e^x + \beta}\right)^k + \mathscr{C}, \ x \in \mathbb{R}, \ n \geq 2 \quad (7)$$

Pentru $a = -1$ și $b = 0$ ecuația (2) devine

$$f''(x) = f'(x), \ x \in D.$$

Soluția acestei ecuații este $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha e^x + \beta$, unde pentru $\alpha\beta < 0$ avem $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\ln\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\right\}$, iar pentru $\alpha\beta \geq 0$ considerăm $D = \mathbb{R}$.

Pe baza Teoremei 1 pentru integralele

$$I_n = \int\left(\frac{\alpha e^x}{\alpha e^x + \beta}\right)^n dx, \ x \in D, \ n \geq 1$$

avem $I_k = \frac{1}{1-k}\left(\frac{\alpha e^x}{\alpha e^x + \beta}\right)^{k-1} + I_{k-1}$.

Însumând pentru $k = 2, 3, 4, \ldots, n$ și ținând cont că $I_1 = \ln|\alpha e^x + \beta| + \mathscr{C}$ obținem relația (7).

Observație.

1) Pentru $\alpha \in \mathbb{R}^*$ și $\beta = 0$ avem $f(x) = f'(x) = \alpha e^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$I_n = \int dx = x + \mathscr{C}, \quad n \geq 1.$$

2) Pentru $\alpha = 1$ și $\beta > 0$ se obține Problema **20779, GM 5/1986**:

$$I_n = \int \left(\frac{e^x}{e^x + \beta} \right)^n dx = \ln\left| e^x + \beta \right| - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left(\frac{e^x}{e^x + \beta} \right)^k + \mathscr{C}, \ n \geq 2$$

cu $I_1 = \ln\left(e^x + \beta\right) + \mathscr{C}$.

4. Considerăm

$$I_n = \int \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right)^n dx, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \ n \geq 0.$$

Are loc relația de recurență

$$I_n = \frac{1}{1-n} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right)^{n-1} - I_{n-2}, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \ n \geq 2,$$

unde $I_0 = x + \mathscr{C}$, $I_1 = \ln\left(\cos x + \sin x\right) + \mathscr{C}$.

În ecuația (2) considerăm $a = 0$ și $b = 1$. Atunci vom avea

$$f''(x) + f(x) = 0, \ x \in D.$$

O soluție a acestei ecuații este funcția $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) = D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \cos x$. Pe baza Teoremei 1 rezultă

$$I_n = \frac{1}{1-n} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right)^{n-1} - I_{n-2}, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \ n \geq 2.$$

5. Pentru integralele

$$I_n = \int \left(\frac{3\cos 2x - \sin 2x}{\cos 2x + \sin 2x} \right)^n dx, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \ n \geq 1$$

avem formula de recurență

$$I_n = \frac{1}{1-n} \left(\frac{3\cos 2x - \sin 2x}{\cos 2x + \sin 2x} \right)^{n-1} + 2I_{n-1} - 5I_{n-2}, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \ n \geq 2$$

unde $I_0 = x + \mathscr{C}$, $I_1 = x + \ln\left(\cos 2x + \sin 2x\right) + \mathscr{C}$.

Demonstrație. În (2) fie $a=-2$ și $b=5$. Vom avea ecuația diferențială

$$f''(x)-2f'(x)+5f(x)=0.$$

O soluție a acestei ecuații este funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x}(\cos 2x+\sin 2x)$.

Bibliografie

[1] ROȘCULEȚ, M.N. *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979

[2] RUS, I. A. *Ecuații diferențiale, ecuații integrale și sisteme dinamice*, Transilvania Press, Cluj-Napoca, 1996

SOME RECURRENT INTEGRAL FORMULAS

Abstract. In this paper we establish a recurrent integral formula for

$$I_n=\int\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^n dx, x\in D,\ n\in\mathbb{N}$$

where $f:D\to\mathbb{R}$ is a solution of the differential equation

$$f''(x)+af'(x)+bf(x)=0,\qquad x\in D$$

with $a,b\in\mathbb{R}$. We present some application of it, too.

Primit la redacție: 01.10.2002

Universitatea de Nord Baia Mare
Facultatea de Științe
Departamentul de Matematică și Informatică
Str. Victoriei 76, 4800 Baia Mare, ROMANIA
E-mail: hmand@personal.ro