Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 11(2002), 67 - 72

# ASUPRA TRIUNGHIURILOR CARE AU UN UNGHI EGAL CU MEDIA CELORLALTE DOUĂ UNGHIURI

**Maria Sânziana POP și Ileana BALAZS**

În lucrarea [1] L. Trouche pune problema găsirii triunghiurilor care au unghiurile în progresie geometrică și cea a găsirii acelor care au măsura acestor unghiuri în grade, exprimate în numere întregi.

În cele ce urmează vom generaliza rezultatul găsit relativ la situația în care un unghi este media geometrică a celorlalte două și în cazul altor tipuri de medii.

Vom nota cu $x, y$ și $z$ unghiurile triunghiului. Convenim că peste tot măsura unghiurilor se exprimă în grade, deci $x + y + z = 180^0$ și pentru simplificarea scrierii, nu mai punem în evidență simbolul pentru grade.

## 1. Un unghi este media aritmetică a celorlalte două

Avem $z = \dfrac{x+y}{2}$, de unde, întrucât suma tuturor unghiurilor este 180, rezultă că $z = 60$ și

$$x + y = 120 \tag{1}$$

Cum $x, y \in (0, 120)$ rezultă că locul geometric al punctelor $(x, y)$ din plan, cu proprietatea cerută, este **segmentul deschis de dreaptă AB** (Fig.1), unde $A(120, 0)$ și $B(0, 120)$.

Există 119 triplete $(x, y, z)$ de acest tip: $(k, 60, 120 - k)$; $k = 1, \dots, 119$ la care corespund doar 60 de triunghiuri care nu sunt asemenea, și anume

$$(1;\ 119;\ 60)\ ,\ (2;\ 118;\ 60)\ , \dots , (60,\ 60,\ 60)$$

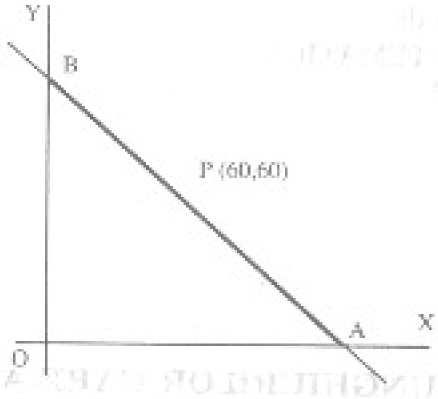


*Figura 1*

**2. Un unghi este media geometrică a celorlalte două ([1]).**

Avem $z = \sqrt{xy}$, de unde, cum $z = 180 - (x + y)$; $x, y \in (0, 180)$ rezultă

$$x^2 + xy + y^2 - 360x - 360y + 180^2 = 0 \tag{2}$$

deci ecuaţia unei conice.

Întrucât invarianţii conicei sunt $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} > 0$; $\Delta = -90^2 \neq 0$ şi $I = 2$, avem o conică nedegenerată şi anume o elipsă cu centrul $C$ de coordonate $C(120, 120)$. Printr-o rotaţie de unghi de măsură $45°$ şi translaţia originii reperului de coordonate în centrul clipsei definite de ecuaţiile

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + y'}{\sqrt{2}} + 120 \\ y = \dfrac{x' - y'}{\sqrt{2}} + 120 \end{cases} \tag{3}$$

obţinem ecuaţia elipsei scrisă sub forma canonică

$$\frac{x'^2}{(60\sqrt{2})^2} + \frac{y'^2}{(60\sqrt{6})^2} - 1 = 0 \tag{4}$$

Aceasta ne permite reprezentarea ei grafică cu uşurinţă în raport cu reperul determinat de prima bisectoare şi paralela prin centru la cea de-a doua bisectoare (Fig.2) având semiaxele $a = 60\sqrt{2}$ respectiv $b = 60\sqrt{6}$. Menţionăm că, având în vedere condiţia $x, y \in (0, 180)$, locul geometric al punctelor $(x, y)$ este arcul de elipsă tangent axelor de coordonate $AB$, fără extremităţi, unde $A(180°, 0)$, $B(0, 180)$.

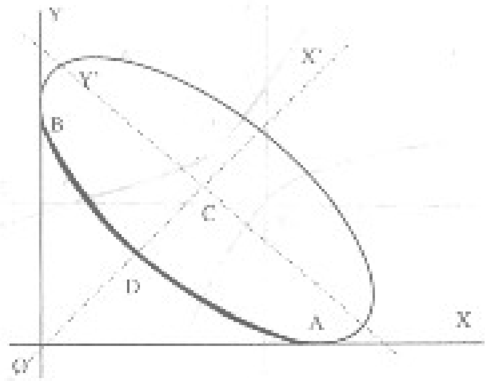


*Figura 2*

## 3. Un unghi este media armonică a celorlalte două

Din condiţia $\frac{2}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ şi relaţia $x + y + z = 180$ se deduce ecuaţia locului geometric al măsurilor unghiurilor $x$ şi $y$:

$$x^2 + 4xy + y^2 - 180x - 180y = 0 \tag{5}$$

Deoarece invarianţii acestei conice sunt $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 <;\ \Delta = -270;$ $I = 2$, conica este nedegenerată şi anume o hiperbolă de centru $C(30°; 30°)$ obţinut ca soluţie a sistemului $\begin{cases} 2x + 4y - 180 = 0 \\ 4x + 2y - 180 = 0 \end{cases}$

Printr-o translaţie şi o rotaţie de unghi de 45°, definită de ecuaţiile

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + y'}{\sqrt{2}} + 30 \\ y = \dfrac{x' - y'}{\sqrt{2}} + 30 \end{cases} \tag{6}$$

obţinem hiperbola raportată la reperul $x'Cy'$ (Fig.3) în care axa $x'$ este prima bisectoare iar $y'$ paralela dusă prin centru la ce-a de a doua bisectoare.

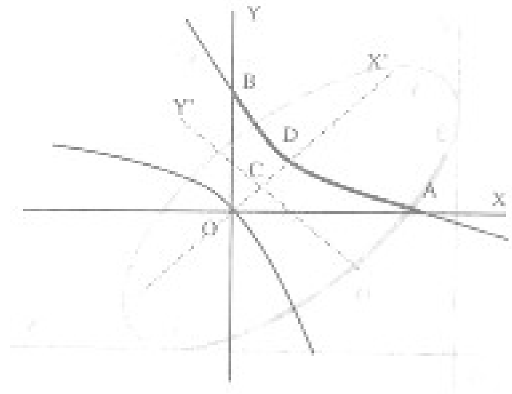


*Figura 3*

$$\frac{x'^2}{(30\sqrt{2})^2} - \frac{y'^2}{(30\sqrt{6})^2} = 1 \tag{7}$$

Deducem ecuaţiile asimptotelor hiperbolei $y' = \pm\frac{b}{a}x'$; $y' = \pm\sqrt{3}x'$ care fac unghi de $60°$, respectiv $120°$ cu axa $CX$, ceea ce ne permite trasarea ei cu uşurinţă.

Prin urmare, întrucât $x, y \in (0°, 180°)$, locul geometric al măsurilor a două unghiuri ale triunghiurilor în care cel de-al treilea unghi este media pătratică a primelor două este un arc deschis de hiperbolă $AB$, fără extremităţile $A(180°, 0°)$ şi $B(0°, 180°)$.

## 4. Un unghi este media pătratică a celorlalte două

Din condiţia $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ şi relaţia $x + y + z = 180°$ se deduce ecuaţia

$$x^2 + y^2 + 4xy - 720x - 720y + 2 \cdot 180^2 = 0 \tag{8}$$

Ecuaţia reprezintă o conică ai cărei invarianţi fiind $\delta = -3$; $\Delta = 2 \cdot 180^2$ şi $I = 2$, este o hiperbolă de centru $C(120°, 120°)$. Printr-o translaţie a originii în centru şi o rotaţie definită de ecuaţiile

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + y'}{\sqrt{2}} + 120 \\ y = \dfrac{-x' + y'}{\sqrt{2}} + 120 \end{cases} \tag{9}$$

obţinem ecuaţia hiperbolei scrisă sub forma canonică

$$-x'^2 + 3y'^2 - 6 \cdot 60^2 = 0,$$

adică

$$\frac{x'^2}{\left(60\sqrt{6}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(60\sqrt{2}\right)^2} - 1 = 0 \qquad (10)$$

Reprezentând grafic (Fig.4) această hiperbolă şi ţinând seama de condiţia $x, y \in (0, 180)$ se deduce că locul geometric căutat este format din arcul deschis de hiperbolă $\widehat{AB}$ în care coordonatele lui $A$ şi $B$ sunt $A\left(\left(2-\sqrt{2}\right)180; 0\right)$ şi $B\left(0; \left(2-\sqrt{2}\right)180\right)$.

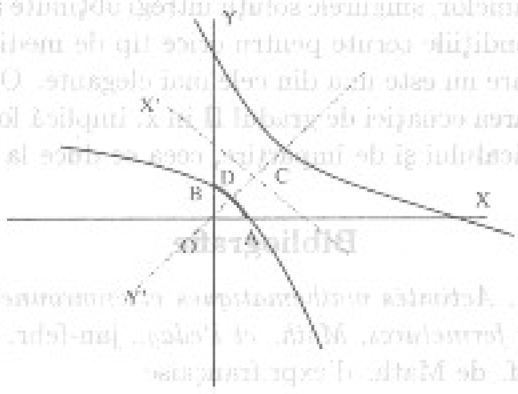


*Figura 4*

În prezentul articol, trasarea locurilor geometrice rezultate s-a făcut utilizând programul MAPLE.

Din simetria ecuaţiilor rezultă că dacă $(\alpha, \beta, 180 - \alpha - \beta)$ este o soluţie, atunci $(\beta, \alpha, 180 - \alpha - \beta)$ este de asemenea o soluţie.

Menţionăm că în lucrarea [1], Trouche a arătat că în cazul mediei geometrice nu există alte soluţii exprimate în numere întregi, decât cele corespunzătoare triunghiului echilateral.

Studiul soluţiilor exprimate în numere întregi ale ecuaţiilor (2), (5) şi (8) se poate face aplicând teoria ecuaţiilor diofantice de gradul II, dar am preferat să utilizăm calculatorul.

În acest sens rulăm următorul program scris în limbajul C, a cărui funcţie principală ce găseşte soluţiile întregi ale ecuaţiei (2) este:

```
main()
    int i,j;
    for (i=0;i<180;i++)
        for(j=0;j<180;j++)
       if(sqr(i)+i*j+sqr(j)-360*i-360*j+sqr(180)==0)
           printf("valoarea primului unghi este %d",i);
           printf("valoarea primului unghi este %d",j);
           printf("valoarea primului unghi este %d",180-i-j);
    }
  }
```

Soluţiile întregi ale ecuaţiilor (5) şi (8) s-au determinat analog, prin adaptarea condiţiei instrucţiunii `if`.

Prin rularea programelor, singurele soluţii întregi obţinute au fost: $(60, 60, 60)$ care îndeplinesc condiţiile cerute pentru orice tip de medie.

Această rezolvare nu este una din cele mai elegante. O altă abordare, ca de exemplu rezolvarea ecuaţiei de gradul II în x, implică folosirea operaţiilor de extragere a radicalului şi de împărţire, ceea ce duce la rotunjiri.

## Bibliografie


[1 ] Trouche, L., *Activités mathematiques et environnement calculatrice: ouvertures et fermetures, Math. et Pedag.*, jan-febr. 2002 no 135, Soc. Belge de Prof. de Math. d'expr.française


## TRIANGLES IN WHICH AN ANGLE IS A MEAN OF THE OTHERS


**Abstract.** In this article we determine all the triangles which have an angle equal to the geometric, arithmetic, harmonic or quadratic mean of the others. The angles are measured in degrees. We also study the particular case when the measures of the angles are integer numbers.



Primit la redacţie: 23.10.2002



Maria Sânziana Pop
Universitatea de Nord Baia Mare
Departametul de Matematică şi Informatică
Str.Victoriei 76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA
E-mail:mspop@ubm.ro

Ileana Balazs
Universitatea de Nord Baia Mare
Departamentul de Matematică şi Informatică
Str.Victoriei 76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA
E-mail: ilibalazs@yahoo.com