Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 11(2002), 73 - 84

CERCURILE EXÎNSCRISE UNUI PATRULATER

Ovidiu POP

1. Introducere şi notaţii.

În acest articol vom defini noţiunea de cerc exînscris unui patrulater, corespunzător unei laturi a patrulaterului, determinând în anumite condiţii, razele celor patru cercuri exînscrise. În final, articolul conţine identităţi şi inegalităţi verificate de razele cercurilor exînscrise unui patrulater.

În cele ce urmează, pentru un patrulater ABCD vom folosi următoarele notaţii:
a, b, c, d - lungimile laturilor AB, BC, CD, respectiv DA;
A, B, C, D - măsurile unghiurilor patrulaterului ABCD;
O - centrul cercului circumscris patrulaterului inscriptibil ABCD;
I - centrul cercului înscris patrulaterului circumscriptibil ABCD;
R - raza cercului circumscris patrulaterului inscriptibil ABCD;
r - raza cercului înscris patrulaterului circumscriptibil ABCD;
S - aria patrulaterului ABCD;
P - semiperimetrul patrulaterului ABCD;
e, f - lungimile diagonalelor BD, respectiv AC.

2. Cerc exînscris unui patrulater. Raza cercului exînscris unui patrulater.

Definiţie. Cercul tangent la o latură a unui patrulater convex şi tangent la prelungirile celor două laturi alăturate acesteia, se numeşte cercul exînscris patrulaterului convex corespunzător laturii la care este tangent.

Vom nota centrul şi raza acestui cerc cu *I*, respectiv *r*, indexate inferior după latura la care este tangent cercul exînscris.

Teorema 1. *Fie patrulaterul inscriptibil ABCD, atunci*

$$r_a = \frac{a \cdot S}{(p-a)\cdot(a+c)}$$ *și analoagele.*

Demonstrație. Distingem două situații corespunzătoare figurilor de mai jos. Considerăm cazul în care AD nu este paralelă cu BC (fig. 1) și fie AD $\cap$ BC = {P}.

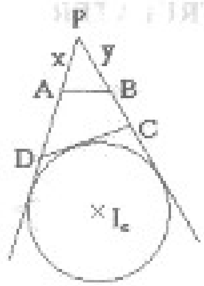

Fig. 1

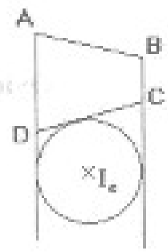

Fig. 2

Notăm PA = x, PB = y și deoarece patrulaterul ABCD este inscriptibil, rezultă că $\Delta PAB \sim \Delta PCD$, de unde $\frac{x}{y+b} = \frac{y}{x+d} = \frac{a}{c}$, sau

$$(1) \quad \begin{cases} cx - ay = ab \\ -ax + cy = ad \end{cases}$$

Din configurația din fig. 1 rezultă că c > a.

Dacă prin absurd a = c, adunând ecuațiile din (1), obținem că 0= a(b + d), ceea ce este fals, deci $a \neq c$.

Rezolvând sistemul (1), se obține:

$$(2) \quad \begin{cases} x = \dfrac{a(bc+ad)}{c^2 - a^2} \\ y = \dfrac{a(ab+cd)}{c^2 - a^2} \end{cases}$$

de unde

(3) $x + y = \dfrac{a(b+d)}{c-a}$

şi

(4) $x - y = \dfrac{a(b-d)}{c+a}$.

Notăm cu p' semiperimetrul triunghiului PDC. Avem $p' = \dfrac{PD + PC + CP}{2} =$

$= \dfrac{(x+d)+c+(b+y)}{2}$ şi ţinând seama de (3), obţinem

(5) $p' = \dfrac{c(p-a)}{c-a}$.

Ţinând seama de (5) calculăm $p' - c = \dfrac{c(p-a)}{c-a} - c$, deci

(6) $p' - c = \dfrac{c(p-c)}{c-a}$.

Din asemănarea triunghiurilor PAB şi PCD rezultă că raportul ariilor lor este egal cu pătratul raportului de asemănare, deci $\dfrac{A[PAB]}{A[PCD]} = \left(\dfrac{a}{c}\right)^2$, de unde utilizând proporţii derivate şi faptul că $A[PCD] - A[PAB] = S$ obţinem

(7) $A[PDC] = \dfrac{c^2 S}{c^2 - a^2}$.

Dar $r_c = \dfrac{A[PDC]}{p' - c}$, şi ţinând seama de (6) şi (7) avem

(8) $r_c = \dfrac{cS}{(p-c)(a+c)}$.

Analog, pentru calculul razei cercului exînscris tangent laturii AB, notată r_a, determinăm raza cercului înscris triunghiului PAB. Deoarece

(9) $A[PAB] = \dfrac{a^2 S}{c^2 - a^2}$.

Notând cu p'' semiperimetrul triunghiului PAB, ținând seama de (3) avem:

$p'' = \dfrac{x+y+a}{2}$, de unde

(10) $\quad p'' = \dfrac{a(p-a)}{c-a}$.

Prin urmare $r_a = \dfrac{A[PAB]}{p''}$ și folosind relațiile (9) și (10) obținem

(11) $\quad r_a = \dfrac{aS}{(p-a)(a+c)}$.

Din (8) și (11) rezultă concluzia teoremei.

Dacă AD și BC sunt paralele (fig. 2) și deoarece patrulaterul ABCD este inscriptibil, rezultă că AB ≡ DC, adică a = c. Deci patrulaterul ABCD este trapez isoscel sau dreptunghi. Atunci h fiind distanța dintre AD și BC, avem că $S = \dfrac{(b+d)h}{2}$. Dar $r_c = \dfrac{h}{2}$, deci $r_c = \dfrac{S}{b+d}$, care se obține din $r_c = \dfrac{cS}{(p-c)(a+c)}$, considerând a = c.

Deci formula $r_a = \dfrac{aS}{(p-a)(a+c)}$ reprezintă raza cercului exînscris patrulaterului ABCD, corespunzător laturii a, în orice caz posibil.

3. Calculul distanței OI_c.

Teorema 2. *Fie patrulaterul ABCD înscris în cercul C(O, R) și circumscris cercului C(I, r); α, β, γ, δ arcele corespunzătoare laturilor AB, BC, CD, respectiv DA. Are loc relația*

(12) $$\frac{\cos\dfrac{\alpha+\gamma}{4}}{\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{4}} = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(b+d)(ac+bd)}}.$$

Demonstrație.

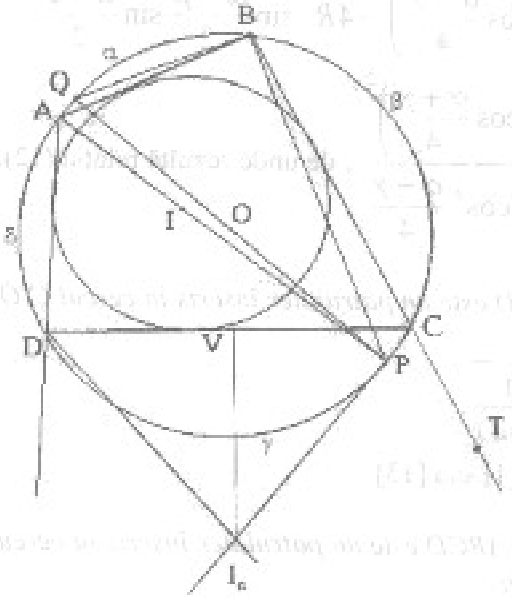

Fig. 3

Deoarece $a = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$, $b = 2R\sin\frac{\beta}{2}$, $c = 2R\sin\frac{\gamma}{2}$, $d = 2R\sin\frac{\delta}{2}$ și $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\pi$, (fig.3), avem

$$ab+cd =$$

$$= 4R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}\right) =$$

$$= 2R^2\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\right) =$$

$$= 4R^2\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta-\gamma+\delta}{4},$$

de unde avem relația

$$(13)\quad ab+cd = 4R^2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\delta}{2}.$$

Analog

$$(14)\quad ac+bd = 4R^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\delta}{2},$$

$$(15)\quad ad+bc = 4R^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

și

$$(16)\quad a+c = b+d = 4R\sin\frac{\alpha+\gamma}{4}\cos\frac{\alpha-\gamma}{4}.$$

Din relațiile (13) - (15) avem

$$\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(b+d)(ac+bd)}=\frac{4R^2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\cdot 4R^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\left(4R\sin\frac{\alpha+\gamma}{4}\cos\frac{\alpha-\gamma}{4}\right)^2\cdot 4R^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\delta}{2}}=$$

$$=\frac{\sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha+\gamma}{4}\cos^2\frac{\alpha-\gamma}{4}}=\frac{\left(2\sin\frac{\alpha+\gamma}{4}\cos\frac{\alpha+\gamma}{4}\right)^2}{4\sin^2\frac{\alpha+\gamma}{4}\cos^2\frac{\alpha-\gamma}{4}}$$, de unde rezultă relaţia (12).

Teorema 3 (L. Carlitz). *Dacă ABCD este un patrulater înscris în cercul C(O, R) şi circumscris cercului C(I, r), atunci*

(17) $\quad OI^2 = R^2 - 2Rr\sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(b+d)(ac+bd)}}$.

Demonstraţia se găseşte în lucrarea [1] sau [13].

Teorema 4 (J-B. Durrande). *Dacă ABCD este un patrulater înscris în cercul C(O, R) şi circumscris cercului C(I, r), atunci*

(18) $\quad OI^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2+r^2}$

Demonstraţia se găseşte în [1], [6] sau [13].

Teorema 5 (Ovidiu Pop). *Dacă ABCD este un patrulater înscris în cercul C(O, R) şi circumscris cercului C(I, r), atunci*

(19) $\quad OI_c^2 = R^2 + r_c\left(\sqrt{4R^2+r^2} - r\right)$,

unde I_c este centrul cercului exînscris patrulaterului ABCD, corespunzător laturii c.

Demonstraţie. Fie $AI \cap C(O, R) = \{A, P\}$, $PO \cap C(O, R) = \{P, Q\}$, $I_cV \perp DC$, $V \in DC$, $T \in (BC - [BC]$. Deoarece AI este bisectoarea unghiului DAB, rezultă că $\angle DAP = \dfrac{\angle DAB}{2} = \dfrac{\beta+\gamma}{4}$. Dar $\angle DAP \equiv \angle DCP$ şi $\angle DCT \equiv \angle DAB$, de unde rezultă că $\angle DCP = \dfrac{\angle DCT}{2}$, deci CP este bisectoarea unghiului DCT şi punctele C, P şi I_c sunt coliniare. Deoarece $\angle BQP \equiv \angle BAP = \dfrac{m(BOP)}{2}$, rezultă

$\angle VCI_e \equiv \angle BQP$. Din asemănarea triunghiurilor CVI$_e$ şi QBP avem $\frac{CI_e}{QP} = \frac{VI_e}{BP}$, de unde

(20) $CI_e \cdot BP = 2r_e R$.

Din puterea punctului I$_e$ faţă de cercul C(O, R) avem

(21) $I_e C \cdot I_e P = OI_e^{\,2} - R^2$.

Din relaţiile (22) şi (23) obţinem

(22) $2r_e R = \left(OI_e^{\,2} - R^2\right) \cdot \frac{BP}{PI_e}$.

În triunghiul DCI$_e$, avem CV = $r_e \text{ctg}\frac{\beta+\gamma}{4}$ şi DV = $r_e \text{ctg}\frac{\gamma+\delta}{4}$. Dar DC = CV + DV şi înlocuind, obţinem relaţia

(23) $DC = r_e \cdot \frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{4}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{4}\sin\frac{\delta+\gamma}{4}}$.

Întrucât $m(\angle PDC) = \frac{m(\angle POC)}{2} = \frac{\gamma - \frac{\beta+\gamma}{2}}{2} = \frac{\gamma-\beta}{4}$, în triunghiul DPC, din teorema sinusului avem $\frac{PC}{\sin(\angle PDC)} = \frac{DC}{\sin(\angle DPC)}$, de unde

(24) $PC = DC \cdot \frac{\sin\frac{\gamma-\beta}{4}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$.

În triunghiul DCI$_e$, $\sin(\angle DCI_e) = \frac{r_e}{CI_e}$, de unde

(25) $CI_e = \frac{r_e}{\sin\frac{\beta+\gamma}{4}}$.

Deoarece PI$_e$ = CI$_e$ – PC, din relaţiile (23) - (25), avem

$$\mathrm{PI_c} = \frac{r_c}{\sin\frac{\beta+\gamma}{4}} - r_c\,\frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{4}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{4}\sin\frac{\delta+\gamma}{4}}\cdot\frac{\sin\frac{\gamma-\beta}{4}}{\sin\frac{\gamma}{2}} =$$

$$= r_c\cdot\frac{\sin\frac{\delta+\gamma}{4}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\gamma-\alpha}{4}\sin\frac{\gamma-\beta}{4}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{4}\sin\frac{\gamma+\delta}{4}\sin\frac{\gamma}{2}} =$$

$$= r_c\,\frac{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\delta-\gamma}{4} - \cos\frac{\delta+3\gamma}{4} - \sin\frac{2\gamma-\alpha-\beta}{4} - \sin\frac{\alpha-\beta}{4}\right)}{\sin\frac{\beta+\gamma}{4}\sin\frac{\gamma+\delta}{4}\sin\frac{\gamma}{2}} =$$

$$= r_c\,\frac{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\delta-\gamma}{4} - \sin\frac{\alpha-\beta}{4}\right)}{\sin\frac{\beta+\gamma}{4}\sin\frac{\gamma+\delta}{4}\sin\frac{\gamma}{2}} = r_c\,\frac{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\delta-\gamma}{4} - \cos\frac{2\beta+\gamma+\delta}{4}\right)}{\sin\frac{\beta+\gamma}{4}\sin\frac{\gamma+\delta}{4}\sin\frac{\gamma}{2}}, \text{ de unde}$$

(26) $\mathrm{PI_c} = r_c\cdot\dfrac{\sin\frac{\beta+\delta}{4}}{\sin\frac{\gamma+\delta}{4}\sin\frac{\gamma}{2}}$.

În triunghiul BPC, din teorema sinusului avem că $\dfrac{BP}{\sin(\angle BCP)} = \dfrac{CP}{\sin(\angle PBC)}$.

Ținând scama de expresia unghiurilor, de (25) și (26), obținem

(27) $\mathrm{BP} = r_c\cdot\dfrac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{4}}{\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta+\gamma}{4}}$. Din (22), (26) și (27) avem

(28) $\mathrm{OI_c}^2 = \mathrm{R}^2 + 2\mathrm{r_cR}\dfrac{\cos\frac{\gamma+\alpha}{4}}{\cos\frac{\gamma-\alpha}{4}}$,

Din (17) și (18) avem

(29) $\sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(b+d)(ac+bd)}} = \dfrac{\sqrt{4R^2+r^2}-r}{2R}$.

Din (12), (28) şi (29) obţinem relaţia din Teorema 5.

4. Identităţi cu razele cercurilor exînscrise.

Teorema 6. *Dacă ABCD este patrulater inscriptibil şi circumscriptibil, atunci a, b, c, d sunt rădăcinile ecuaţiei*

(30) $x^4 - 2px^3 + \left(p^2 + 2r^2 + 2r\sqrt{4R^2 + r^2}\right)x^2 - 2rp\left(\sqrt{4R^2 + r^2} + r\right)x + r^2p^2 = 0$.

Demonstraţia se găseşte în lucrarea [17].

Teorema 7. *Dacă ABCD este patrulater inscriptibil şi circumscriptibil, atunci*

(31) $r_a = \dfrac{ar}{c}$,

(32) $r_a + r = \dfrac{rp}{c}$

şi analoagele, iar r_a, r_b, r_c, r_d sunt rădăcinile ecuaţiei

(33) $x^4 - 2\left(\sqrt{4R^2 + r^2} - r\right)x^3 + \left(p^2 + 2r^2 - 4r\sqrt{4R^2 + r^2}\right)x^2 -$
$- 2r^2\left(\sqrt{4R^2 + r^2} - r\right)x + r^4 = 0$.

Demonstraţie. Relaţia (31) rezultă din Teorema 1, ţinând seama că $a + c = p$, $S = rp$ şi $p - a = c$. Avem $r_a + r = \dfrac{ar}{c} + r = \dfrac{r(a+c)}{c} = \dfrac{rp}{c}$, adică (32).

Din relaţia (32) avem $c = \dfrac{rp}{r + r_a}$ şi ţinând seama că c este rădăcină a ecuaţiei (30), înlocuind şi efectuând calculele, obţinem că r_a verifică ecuaţia (33).
Analog se demonstrează relaţiile corespunzătoare pentru r_b, r_c, r_d.

Teorema 8. *Într-un patrulater ABCD, inscriptibil şi circumscriptibil, avem:*

(34) $\sum r_a = 2\left(\sqrt{4R^2 + r^2} - r\right)$;

(35) $\sum r_a r_b = p^2 + 2r^2 - 4r\sqrt{4R^2 + r^2}$;

(36) $\sum r_a r_b r_c = 2r^2\left(\sqrt{4R^2 + r^2} - r\right)$;

(37) $r_a r_b r_c r_d = r^4$;

(38) $\sum r_a^2 = 16R^2 - 2p^2 + 4r^2$;

(39) $\sum \dfrac{1}{r_a} = \dfrac{2\left(\sqrt{4R^2 + r^2} - r\right)}{r^2}$;

(40) $\sum \frac{1}{r_a r_b} = \frac{p^2 + 2r^2 - 4r\sqrt{4R^2 + r^2}}{r^4}$.

Demonstrație. Relațiile sunt imediate utilizând Teorema 7.

Observație. Folosind Teoremele 7 și 8 se pot obține și alte identități.

5. Inegalități cu razele cercurilor exînscrise.

Teorema 9 (L. Fejes Tóth). *Într-un patrulater ABCD, inscriptibil și circumscriptibil are loc inegalitatea*

(41) $R \geq r\sqrt{2}$,

cu egalitate dacă și numai dacă ABCD este pătrat.

Demonstrația se găsește în lucrările [14] sau [16].

Teorema 10. *Fie un patrulater ABCD, inscriptibil și circumscriptibil, atunci*

(42) $2 \cdot \sqrt{2r\left(\sqrt{4R^2 + r^2} - r\right)} \leq p$.

Dacă $R = r\sqrt{2}$ atunci ABCD este pătrat, cele două cercuri C(O, R) și C(I, r) sunt concentrice și egalitatea are loc. Dacă $R \neq r\sqrt{2}$ atunci egalitatea are loc dacă și numai dacă ABCD este trapez isoscel.

(43) $p \leq \sqrt{4R^2 + r^2} + r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă ABCD este un patrulater ortodiagonal.

(44) $2 \cdot \sqrt{2r\left(\sqrt{4R^2 + r^2} - r\right)} \leq p \leq \sqrt{4R^2 + r^2} + r$.

Dacă $R = r\sqrt{2}$ au loc simultan egalitățile și în acest caz ABCD este pătrat.

Dacă $R \neq r\sqrt{2}$ atunci cel puțin o inegalitate este strictă.

Demonstrația se găsește în lucrările [14], [16].

Teorema 11. *Fie patrulaterul ABCD inscriptibil și circumscriptibil. Atunci au loc inegalitățile:*

(45) $4r \leq \sum r_a \leq 3R\sqrt{2} - 2r$;

(46) $6r^2 \leq 2r\left(2\sqrt{4R^2 + r^2} - 3r\right) \leq \sum r_a r_b \leq 2\left(2R^2 + 2r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}\right) \leq$
$\leq 2\left(3R^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}\right)$;

(47) $4r^3 \leq \sum r_a r_b r_c \leq R^2\left(\frac{3R\sqrt{2}}{2} - r\right)$;

(48) $r_a r_b r_c r_d \leq \frac{R^4}{4}$;

(49) $4\left(2R^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}\right) \leq \sum r_a{}^2 \leq 4\left(4R^2 + 5r^2 - 4r\sqrt{4R^2 + r^2}\right)$;

(50) $\frac{6}{r^2} \leq \frac{2\left(2\sqrt{4R^2 + r^2} - 3r\right)}{r^3} \leq \sum \frac{1}{r_a r_b} \leq \frac{2\left(2R^2 + 2r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}\right)}{r^4}$.

Demonstrație. Din Teoremele 8, 9 și 10 rezultă Teorema 11.

Bibliografie

[1] BIȘBOACĂ, N. și CETERAȘ, M., *O demonstrație a unei relații a lui Durrande din geometria patrulaterului*, G. M. 9, 1991, pag. 325-326.

[2] BOTTEMA, O. ș. a., *Geometric inequalities*, Groningen, 1969, The Netherlands.

[3] BRÂNZEI, D. ș. a., *Bazele raționamentului geometric*, Editura Academiei, București, 1983.

[4] BRÂNZEI, D., *Geometrie circumstanțială*, Editura Junimea, Iași, 1983.

[5] DINCĂ, M., *Asupra teoremelor lui Ptolemeu*, G. M. 10, 1973, pag. 426-427.

[6] F. G. - M. *Exercices de géométrie.*

[7] HADAMARD, J., *Lecții de geometrie elementară*, Vol. I și II, Editura tehnică, București, 1960-1961.

[8] IONESCU, I., *Maxime și minime geometrice*, Biblioteca Societății de Științe Matematice și Fizice, nr. 11, Editura tehnică, București, 1955.

[9] LALESCU, T., *Geometria triunghiului*, Editura Tineretului, București, 1958.

[10] MIHĂILEANU, N. N., *Complemente de geometrie sintetică*, Editura didactică și pedagogică, București, 1965.

[11] MIHĂILEANU, N. N., *Lecții complementare de geometrie*, Editura didactică și pedagogică, București, 1976.

[12] MIHĂILEANU, N., *Istoria matematicii*, Vol. I și II, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1981.

[13] NICOLESCU, L. şi BOSKOFF, V., *Probleme practice de geometrie*, Editura tehnică, Bucureşti, 1990.

[14] NICOLESCU, L. ş. a., *Metode de rezolvare a problemelor de geometrie*, Editura Universităţii din Bucureşti, 1998, pag. 144-152.

[15] PIMSNER, M. Şi POPA, S., *Probleme de geometrie elementară*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1979.

[16] POP, O., *Inegalităţi în patrulater*, G.M. 5-6, 1988, pag. 203-206.

[17] POP, O., *Identităţi şi inegalităţi într-un patrulater*, G.M. 8, 1989, pag. 279-280.

[18] SÁNDOR, J., *Inegalităţi geometrice*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1988.

[19] SCHOENBERG, I. J., *Privelişti matematice*, Editura tehnică, Bucureşti, 1989.

[20] SIMA, P. D. Şi ANASTASIU, G. I., *Culegere de probleme de trigonometrie*, Editura tehnică, Bucureşti, 1971.

[21] ŢIŢEICA, G., *Probleme de geometrie*, Editura tehnică, Bucureşti.

[22] VODĂ, V. GH., *Surprize în matematica elementară*, Editura Albatros, Bucureşti, 1981.

[23] VODĂ, V. GH., *Vraja geometriei demodate*, Editura Albatros, Bucureşti, 1983.

CIRCLES ESCRIBABLE TO A QUADRILATERAL

Abstract. In this article we will define the notion of circle escribable to a quadrilateral corresponding to a side of the quadrilateral.

Then, in some conditions, the escribable circle's radius will be determined.

In the end, the article contains identities and inequalities checked by the circle' s radius escribable to a quadrilateral.

Primit la redacţie: 19.06.2002

Colegiul Naţional „Mihai Eminescu"
Str. Mihai Eminescu Nr. 5
3900 Satu Mare, ROMANIA