Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.11(2002), 85 - 88

ASUPRA MONOTONIEI UNUI ŞIR

Ovidiu POP, Gheorghe SZÖLLÖSY

În această notă vom demonstra că şirul $(x_n)_{n\geq 2}$ dat de regula $x_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, $n \in N$, $n \geq 2$, este strict crescător. La început, vom demonstra câteva rezultate ajutătoare.

Lema 1. Are loc inegalitatea $x^x(x+2)^{x+1} > (x+1)^{2x+1}$, $\forall x \in R$, $x > 0$.

Demonstraţie. Fie funcţia

$f:(0,\infty) \to R$, $f(x) = x\ln x + (x+1)\ln(x+2) - (2x+1)\ln(x+1)$.

Avem că $f'(x) = \ln x + \ln(x+2) - \dfrac{1}{x+2} - 2\ln(x+1) + \dfrac{1}{x+1}$ şi

$$f''(x) = \frac{3x+4}{x(x+1)^2(x+2)^2}$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x+1}\right] = 0$, rezultă

x	0		$+\infty$
f''		$+$	
f'		$\nearrow$	0

de unde $f'(x) < 0,\ \forall x \in R,\ x > 0$.

Deoarece $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \ln \dfrac{x^x (x+2)^{x+1}}{(x+1)^{2x+1}} = \ln \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1} \right)^{x+1} \cdot \dfrac{1}{\left(\dfrac{x+1}{x} \right)^x} = 0$, rezultă

x	0		$+\infty$
f'		$-$	
f		$\searrow$	0

de unde $f(x) > 0,\ \forall x \in R,\ x > 0$. Inegalitatea $f(x) > 0,\ \forall x \in R,\ x > 0$ este echivalentă cu $\ln \dfrac{x^x (x+2)^{x+1}}{(x+1)^{2x+1}} > 0,\ \forall x \in R,\ x > 0$, echivalent cu $\dfrac{x^x (x+2)^{x+1}}{(x+1)^{2x+1}} > 1,\ \forall x \in R,\ x > 0$, de unde se obține inegalitatea din Lema 1.

Consecință. Au loc inegalitățile

a) $k^k (k+2)^{k+1} > (k+1)^{2k+1},\ \forall k \in N^*$

b) $k^{k^2+k} \cdot (k+2)^{(k+1)^2} > (k+1)^{2k^2+3k+1},\ \forall k \in N^*$

Demonstrație.

a) Rezultă din Lema 1.

b) Rezultă din inegalitatea de la a) prin ridicare la puterea $k+1$.

Lema 2. Are loc inegalitatea $(n+1)^{n^2} \cdot n! > n^{n^2+n},\ \forall n \in N^*$.

Demonstrație. Demonstrăm prin inducție matematică. Propoziția $P(1): 2 > 1$ este adevărată. Presupunem că propoziția $P(k)$ este adevărată, adică are loc inegalitatea

(1) $(k+1)^{k^2} \cdot k! > k^{k^2+k},\ k \in N^*$.

Demonstrăm că și propoziția $P(k+1)$ este adevărată, adică are loc inegalitatea

(2) $(k+2)^{(k+1)^2} \cdot (k+1)! > (k+1)^{k^2+3k+2},\ k \in N^*$.

Din (1) avem $k! > \dfrac{k^{k^2+k}}{(k+1)^{k^2}}$, echivalent cu $(k+1)! > \dfrac{k^{k^2+k}}{(k+1)^{k^2-1}}$, de unde

(3) $(k+2)^{(k+1)^2} \cdot (k+1)! > \dfrac{k^{k^2+k} \cdot (k+2)^{(k+1)^2}}{(k+1)^{k^2-1}},\ k \in N^*$.

Din (2) şi (3) rezultă că lema este demonstrată dacă arătăm că

$$\frac{k^{k^2+k}\cdot(k+2)^{(k+1)^2}}{(k+1)^{k^2-1}}>(k+1)^{k^2+3k+2}.$$

Inegalitatea de mai sus este echivalentă cu

$k^{k^2+k}(k+2)^{(k+1)^2}>(k+1)^{2k^2+3k+1}$, adică inegalitatea b) din Consecinţă.

Propoziţia 1. Şirul $(x_n)_{n\geq 2}$, definit prin $x_n=\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, n\in N, n\geq 2$, este strict crescător.

Demonstraţie. Avem $x_n=\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\sqrt[n(n+1)]{\frac{n^{n(n+1)}}{(n!)^{n+1}}}$ şi

$x_{n+1}=\sqrt[n+1]{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}=\sqrt[n(n+1)]{\frac{(n+1)^{n(n+1)}}{[(n+1)!]^n}}$, de unde $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\sqrt[n(n+1)]{\frac{(n+1)^{n^2}\cdot n!}{n^{n^2+n}}}$.

Pentru a arăta că şirul $(x_n)_{n\geq 2}$ este strict crescător este suficient a arăta că $\frac{x_{n+1}}{x_n}>1,\ \forall n\in N, n\geq 2$, echivalent cu $(n+1)^{n^2}\cdot n!>n^{n^2+n},\ \forall n\in N, n\geq 2$, adică inegalitatea din Lema 2.

Propoziţia 2. Şirul $(x_n)_{n\geq 2}$, definit prin $x_n=\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, n\in N, n\geq 2$, verifică inegalitatea $x_n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \forall n\in N, n\geq 2$.

Demonstraţie. Din Propoziţia 1 avem că $x_n<x_{n+1}, \forall n\in N, n\geq 2$, echivalent cu $x_n^{n+1}<x_{n+1}^{n+1}$, echivalent cu $x_n<\frac{x_{n+1}^{n+1}}{x_n^{n}}, \forall n\in N, n\geq 2$. Înlocuind în membrul drept al inegalităţii şi simplificând, obţinem inegalitatea din enunţ.

Observaţie. Se cunoaşte că limita şirului $(x_n)_{n\geq 2}$ este *e*.

Bibliografie

[1] ARAMĂ, L. şi MOROZAN, T., *Probleme de calcul diferenţial şi integral*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978.

[2] BĂTINEŢU, D. M., *Şiruri*, Editura Albatros, Bucureşti, 1979.

[3] BĂTINEŢU, D. M., MAFTEI, I. V. şi STANCU-MINASIAN, I. M., *Exerciţii şi probleme de analiză matematică pentru clasele a XI-a şi a XII-a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[4] CATANĂ, A. şi CATANĂ, A., *Probleme de analiză matematică şi observaţii metodologice*, Editura Didactică şi Pedagogică, R.A., Bucureşti, 1993.

[5] DUCA, D. I. şi DUCA, E., *Analiză matematică, Culegere de probleme*, Editura Gil Educational, Zalău, 1999.

[6] GELBAUM, B. P. şi OLMSTED, I. M., *Contraexemple în analiză* (traducere din limba engleză), Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1973.

[7] GUSSI GH. STĂNĂŞILĂ, O. şi STOICA, T., *Matematică. Elemente de analiză matematică*, Manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1994.

[8] NICOLESCU, M., ş.a., *Analiză matematică*, vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti,1966.

[9] POPA, C., HIRIŞ, V. şi MEGAN, M., *Introducere în analiza matematică prin exerciţii şi probleme*, Editura Facla, Timişoara, 1976.

[10] SIREŢCHI, GH., *Analiză matematică*, vol. II, Tipografia Universităţii Bucureşti, 1972.

[11] VERNESCU, A., *Analiză matematică*, vol. I şi vol.II, Editura Pantheon, Bucureşti, 2001.

ON THE MONOTONY OF A SEQUENCE

Abstract. In this article we prove that the sequence $(x_n)_{n\geq 2}$ given by $x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, n \in N, n \geq 2$ is a strictly increasing sequence.

Primit la redacţie: 19.06.2002

Colegiul Naţional „Mihai Eminescu"
Str. Mihai Eminescu Nr. 5
3900 Satu Mare, ROMANIA

Str. Avram Iancu Nr. 28E
4925 Sighetu Marmaţiei, ROMANIA