Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol 11(2002), 89 - 94

PROPRIETĂȚI REMARCABILE ALE UNUI PATRULATER DEMONSTRATE CU AJUTORUL NUMERELOR COMPLEXE

Traian TĂMÎIAN

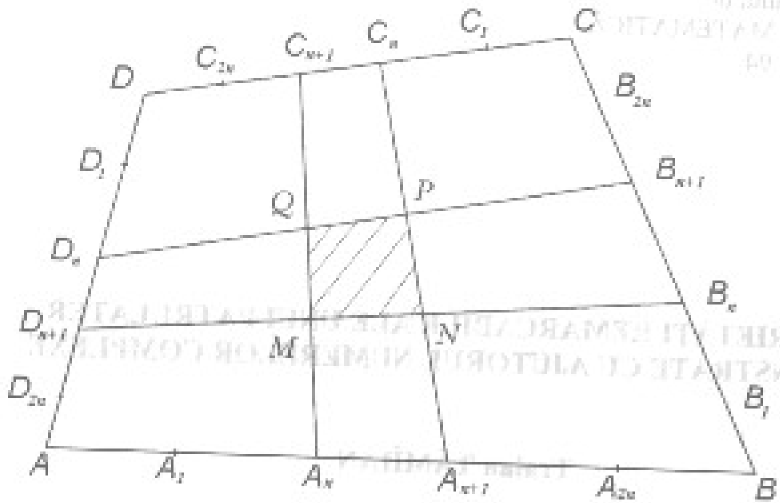
Punctul de pornire al acestui articol îl constituie o problemă dată la admitere în facultăți în anul 1988. Aceasta are următorul enunț:

„Se consideră un patrulater convex $ABCD$. Pe latura $[AB]$ se iau punctele A_1 și A_2 astfel încât $(AA_1) \equiv (A_1A_2) \equiv (A_2B)$, iar pe $[CD]$ se iau punctele C_1 și C_2 astfel încât $(CC_1) \equiv (C_1C_2) \equiv (C_2D)$. Să se arate că $aria[A_1A_2C_1C_2] = \dfrac{1}{3} aria[ABCD]$."

O soluție pe cale geometrică a acestei probleme este dată în [1] la pag. 39.

Scopul articolului de față este de a generaliza această problemă și de a pune în evidență în acest context un patrulater în care vom stabili câteva proprietăți interesante demonstrate cu ajutorul numerelor complexe.

În cele ce urmează considerăm un patrulater convex $ABCD$ în care pe laturile $[AB],[BC],[CD],[DA]$ se iau respectiv punctele A_i, B_i, C_i, D_i $(i = \overline{1,2n})$, astfel încât $(AA_1) \equiv (A_1A_2) \equiv \ldots \equiv (A_{2n}B)$, $(BB_1) \equiv (B_1B_2) \equiv \ldots \equiv (B_{2n}C)$, $(CC_1) \equiv (C_1C_2) \equiv \ldots \equiv (C_{2n}D)$, $(DD_1) \equiv (D_1D_2) \equiv \ldots \equiv (D_{2n}A)$. Dreptele A_nC_{n+1} și $A_{n+1}C_n$ se intersectează cu dreptele B_nD_{n+1} și $B_{n+1}D_n$ în punctele M, N, P, Q formând patrulaterul $MNPQ$, ca în figura următoare:



Generalizarea problemei inițiale este dată de următoarea propoziție:

Propoziția 1. Pentru orice $n \geq 1$ are loc egalitatea:

$$aria[A_nA_{n+1}C_nC_{n+1}] = \frac{1}{2n+1} aria[ABCD]$$

Demonstrație. Se cunoaște următorul rezultat:

„ Dacă $z_1, z_2, ..., z_n$ sunt afixele vârfurilor unui poligon plan convex, orientat direct, atunci aria sa S este dată de formula:

$$S = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{z}_k \cdot z_{k+1}\right), \text{ unde } z_{n+1} = z_1 \text{"}.$$

Demonstrația pentru acest rezultat este dată în [2] la pagina 8.

Pentru a demonstra Propoziția 1 considerăm un sistem de axe cu originea în O și notăm cu litere mici corespunzătoare afixele punctelor considerate. Se cunoaște că dacă $\frac{AA_n}{A_nB} = k$, $k > 0$ atunci $a_n = \frac{a+kb}{1+k}$. În aceste condiții din relațiile $\frac{AA_n}{A_nB} = \frac{n}{n+1}$ (*) și $\frac{AA_{n+1}}{A_{n+1}B} = \frac{n+1}{n}$ (**) rezultă

$$a_n = \frac{a + \frac{n}{n+1}b}{1+\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)a+nb}{2n+1} \qquad (1)$$

respectiv

$$a_{n+1}=\frac{a+\frac{n+1}{n}b}{1+\frac{n+1}{n}}=\frac{na+(n+1)b}{2n+1} \qquad (2)$$

şi analoagele

$$b_n=\frac{(n+1)b+nc}{2n+1} \quad (3) \qquad b_{n+1}=\frac{nb+(n+1)c}{2n+1} \quad (4)$$

$$c_n=\frac{(n+1)c+nd}{2n+1} \quad (5) \qquad c_{n+1}=\frac{nc+(n+1)d}{2n+1} \quad (6)$$

$$d_n=\frac{(n+1)d+na}{2n+1} \quad (7) \qquad d_{n+1}=\frac{nd+(n+1)a}{2n+1} \quad (8)$$

Cu aceste relaţii avem $S=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{a}_n a_{n+1}+\overline{a}_{n+1}c_n+\overline{c}_n c_{n+1}+\overline{c}_{n+1}a_n)=$

$$=\frac{1}{2(2n+1)^2}\operatorname{Im}\left[\left((n+1)\overline{a}+n\overline{b}\right)\left(na+(n+1)b\right)+\left(n\overline{a}+(n+1)\overline{b}\right)\left(nd+(n+1)c\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2(2n+1)^2}\operatorname{Im}\left[\left(n\overline{d}+(n+1)\overline{c}\right)\left((n+1)d+nc\right)+\left((n+1)\overline{d}+n\overline{c}\right)\left((n+1)a+nb\right)\right]=$$

$$+\frac{1}{2(2n+1)^2}\operatorname{Im}[(n^2+n)\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2\right)+n^2\left(a\overline{b}+b\overline{c}+c\overline{d}+d\overline{a}\right)+$$

$$+(n+1)^2\left(\overline{a}b+\overline{b}c+\overline{c}d+\overline{d}a\right)]+\frac{1}{2(2n+1)^2}\operatorname{Im}[n(n+1)\left(\overline{a}c+\overline{b}d+\overline{c}a+\overline{d}b\right)]=$$

$$=\frac{1}{(2n+1)^2}\operatorname{Im}\left[n^2(a\overline{b}+\overline{a}b)+n^2(b\overline{c}+\overline{b}c)+n^2(c\overline{d}+\overline{c}d)+n^2(d\overline{a}+a\overline{d})\right]+$$

$$+\frac{1}{(2n+1)^2}(2n+1)\operatorname{Im}(\overline{a}b+\overline{b}c+\overline{c}d+\overline{d}a)=$$

$$=\frac{1}{2n+1}\operatorname{Im}(\overline{a}b+\overline{b}c+\overline{c}d+\overline{d}a)=\frac{1}{2n+1}\,aria\left[ABCD\right]$$

Am folosit faptul că din

$\overline{a}b+a\overline{b}=|a+b|^2-\left(|a|^2+|b|^2\right)\in\mathbf{R}$ rezultă că $\operatorname{Im}(\overline{a}b+a\overline{b})=0$.

Observaţie. Pentru $n=1$ se obţine problema iniţială.

Următoarele propoziţii vor pune în evidenţă câteva proprietăţi interesante ale patrulaterului astfel obţinut $MNPQ$.

Propoziția 2. *Pentru orice $n \geq 1$ are loc relația:*

$$aria[MNPQ] = \frac{1}{(2n+1)^2} aria[ABCD]$$

Demonstrație. Fie $M_1 \in (A_n C_{n+1})$ astfel încât $\frac{A_n M_1}{M_1 C_{n+1}} = \frac{n}{n+1}$ (9)

adică

$$m_1 = \frac{a_n + \frac{n}{n+1} c_{n+1}}{1 + \frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)a_n + nc_{n+1}}{2n+1} = \frac{(n+1)^2 a + (n^2+n)(d+b) + n^2 c}{(2n+1)^2} \quad (10)$$

Vom demonstra că D_{n+1}, M_1 și B_n sunt coliniare.

Avem

$$d_{n+1} - m_1 = \frac{(2n+1)(n+1)a + n(2n+1)d - (n+1)^2 a - (n^2+n)d - (n^2+n)b - n^2 c}{(2n+1)^2} =$$

$$= \frac{(n^2+n)a - (n^2+n)b - n^2 c + n^2 d}{(2n+1)^2} =$$

$$= \frac{n}{(2n+1)^2}\left[(n+1)a - (n+1)b - nc + nd\right] \quad (11)$$

$$b_n - m_1 = \frac{(n+1)(2n+1)b + n(2n+1)c - (n+1)^2 a - (n^2+n)(b+d) - n^2 c}{(2n+1)^2} =$$

$$= \frac{-(n+1)^2 a + (n+1)^2 b + (n^2+n)c - (n^2+n)d}{(2n+1)^2} =$$

$$= -\frac{n+1}{2n+1}\left[(n+1)a - (n+1)b - nc + nd\right] \quad (12)$$

Din (11) și (12) rezultă $\frac{d_{n+1} - m_1}{b_n - m_1} = -\frac{n}{n+1} \in \mathbf{R}$ și deci $\Rightarrow D_{n+1}, M_1, B_n$ sunt coliniare, adică $M_1 \in A_n C_{n+1} \cap B_n D_{n+1}$. Rezultă că M_1 coincide cu M. Atunci din (9) și (10) rezultă:

$$\frac{A_n M}{M C_{n+1}} = \frac{n}{n+1} \quad (13)$$

și

$$m = \frac{(n+1)^2 a + (n^2+n)(d+b) + n^2 c}{(2n+1)^2} \quad (14)$$

Cum punctul M nu prezintă nici o particularitate, prin permutări circulare obținem:

$$n=\frac{(n+1)^2b+(n^2+n)(c+a)+n^2d}{(2n+1)^2} \qquad (15)$$

$$p=\frac{(n+1)^2c+(n^2+n)(d+b)+n^2a}{(2n+1)^2} \qquad (16)$$

$$q=\frac{(n+1)^2d+(n^2+n)(a+c)+n^2b}{(2n+1)^2} \qquad (17)$$

Scriind analoagele pentru (13) avem:

$$\frac{C_nP}{PA_{n-1}}=\frac{A_{n+1}N}{NC_n}=\frac{C_{n-1}Q}{QA_n}=\frac{n}{n+1} \qquad (18)$$

Relația (13) și ultima egalitate din (18) reprezintă chiar analoagele relațiilor (*) și (**) scrise pentru patrulaterul $AA_{n-1}C_nC_{n+1}$ și conform demonstrației de la Propoziția 1 rezultă că

$$aria[MNPQ]=\frac{1}{2n+1}[A_nA_{n+1}C_nC_{n+1}]=\frac{1}{(2n+1)^2}aria[ABCD]$$

Propoziția 3. *Patrulaterul $MNPQ$ are același centru de greutate ca și patrulaterul $ABCD$.*

Demonstrație. Dacă G_1, G sunt centrele de greutate ale patrulaterului $MNPQ$ respectiv $ABCD$ avem:

$$g_1=\frac{m+n+p+q}{4}=\frac{(n+1)^2+(n^2+n)\cdot 2+n^2}{4(2n+1)^2}(a+b+c+d)=\frac{a+b+c+d}{4}=g$$

și deci rezultă că G_1 și G coincid.

Propoziția 4. *Dacă P_{MNPQ} și P_{ABCD} sunt perimetrele patrulaterelor $MNPQ$ și respectiv $ABCD$ atunci:*

$P_{MNPQ}\le\frac{1}{2n+1}P_{ABCD}$, *cu egalitate dacă și numai dacă $ABCD$ este paralelogram.*

Demonstrație.

Avem $A_nC_{n+1}=|a_n-c_{n+1}|=\frac{|(n+1)(a-d)+n(b-c)|}{2n+1}\le\frac{(n+1)|a-d|+n|b-c|}{2n+1}$

de unde rezultă
$$A_nC_{n+1}\le\frac{(n+1)AD+nBC}{2n+1} \qquad (19)$$

cu egalitate dacă și numai dacă $AD \parallel BC$.

Prin permutări circulare obținem

$$B_nD_{n+1}\le\frac{(n+1)AB+nCD}{2n+1} \qquad (20)$$

cu egalitate d.d. $AB \parallel CD$,

$$C_nA_{n+1} \le \frac{(n+1)BC + nAD}{2n+1} \quad (21)$$

cu egalitate d.d. $AD \parallel BC$,

$$D_nB_{n+1} \le \frac{(n+1)CD + nAB}{2n+1} \quad (22)$$

cu egalitate d.d. $AB \parallel CD$.

Din (19) şi (21) rezultă $A_nC_{n+1} + C_nA_{n+1} \le BC + AD$, cu egalitate d.d. $AD \parallel BC$.

Din (20) şi (22) rezultă $B_nD_{n+1} + D_nB_{n+1} \le AB + CD$, cu egalitate d.d. $AB \parallel CD$.

Din ultimele două relaţii obţinem

$$B_nD_{n+1} + C_nA_{n+1} + D_nB_{n+1} + A_nC_{n+1} \le P_{ABCD} \quad (23)$$

Folosind (13) şi (18) rezultă

$$\frac{A_nM}{A_nC_{n+1}} = \frac{C_{n+1}Q}{A_nC_{n+1}} = \frac{n}{2n+1} \Rightarrow \frac{QM}{A_nC_{n+1}} = \frac{A_nC_{n+1} - (A_nM + C_{n+1}Q)}{A_nC_{n+1}} =$$

$$= 1 - \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1},$$

de unde rezultă $A_nC_{n+1} = (2n+1)QM$

şi analoagele $B_nD_{n+1} = (2n+1)MN$, $C_nA_{n+1} = (2n+1)NP$, $D_nB_{n+1} = (2n+1)PQ$.

Cu acestea din (23) obţinem $P_{MNPQ} \le \frac{1}{2n+1} P_{ABCD}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $BC \parallel AD$ şi $AB \parallel CD$, când $ABCD$ este un paralelogram.

În încheiere propun cititorului să demonstreze Propoziţia 1 pe cale geometrică.

Bibliografie

[1] Constantin Cealera şi colab.: *Admiterea 1988-1994*, E.T. Bucureşti 1995,

[2] Marian Dincă, Marcel Chiriţă: *Numere complexe în matematica de liceu*, Editura All Educaţional 1995.

REMARKABLE PROPERTIES OF QUADRILATERALS PROVED WITH THE HELP OF COMPLEX NUMBERS

Abstract. In this article some of the remarkable properties of quadrilaterals are enunciated and proved with the help of complex numbers.

Primit la redacţie: 04.11.2002

Grupul Şcolar Iuliu Maniu
Str. Iuliu Maniu Nr. 20
3825 Carei, ROMÂNIA