Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 11(2002), 95 – 98

SUR UN PROBLÈME DE NUMÉRATION

Laurenţiu MODAN

Nous avons dédié cette note mathématique, à une question de la Combinatoire Énumerative qui s'applique souvent dans les Probabilités Discretes. Quoique le problème de numération est relativement simple, on voit parfois, que son utilisation, dans la Théorie des Probabilités, est mauvaisement faite, comment nous le montre la bibliographie roumaine indiquée qui s'étend cronologiquement, sur une période assez longue.

Dorénavant, nos commentaires seront orientés vers le schème classique probabiliste, de la *boule sans remise*, connu également sous le nom du *schème hypergéométrique*.

On part de la urne U qui contient a boules blanches et b noires. On tire n boules, $n \leq a+b$, sans remise en U. Le tirage peut être effectué, en prenant toutes les n boules, soit simultanément, soit successivement. Pour qu'on existe $\alpha \leq a$ boules blanches et $\beta \leq b$ boules noires, de toutes ces n boules, déjà retenues, indifféremment que le tirage est fait simultanément, ou successivement, on a la suivante probabilité:

$$P = \frac{C_a^{\alpha} C_b^{\beta}}{C_{a+b}^{n}} \tag{1}$$

Comme dans tous les schèmes classiques, même dans celui-ci qu'on étudie, le calcul de sa probabilité est fait par le rapport entre les nombres des cas favorables et des cas possibles. La rélation (1) nous donne un résultat pareil, dans les deux situations différentes, avec des tirages simultanément ou successivement faits, quoique les nombres des cas favorables et des cas possibles sont distincts. Cette situation n'est point remarquée parmi les livres cités dans notre note!

Par conséquent, en [2], [3] ou [5], on arrive à (1) pour la situation des tirages successifs, le comptage des cas possibles et favorables étant incorrect, fait par l'intermédiaire des combinaisons, à la place des arrangements! En [1] et [6], sans une justification effective, on affirme que „le tirage simultanément, de n boules, revient à leur tirage de n fois, l'une après l'autre".

Quoique dans un compendium du domaine, il faudrait qu'on trouve tous les schèmes de probabilité, en [4], celui-ci qui nous interesse, est présenté, seulement sous la forme d'une *répartition hypergéométrique* et la relation (1) apparait uniquement dans le cas des tirages successifs...

Premierèment, nous analiserons la situation quand les n boules sont tirées simultanément. Le nombre des cas possibles revient à la choix d'un sousensemble de n éléments, d'un ensemble de cardinal $a+b$, qui, on peut être faite en C_{a+b}^{n} modes. Pour le nombre des cas favorables, nous observerons que α boules blanches, sur a blanches, sont choisies en C_{a}^{α} modes, tandis que les β boules noires, sur b noires, sont choisies en C_{b}^{β} modes. Finalement, nous en aurons $C_{a}^{\alpha} C_{b}^{\beta}$ modes, comme des cas favorables. Le rapport de ces cas antérieurement comptés, nous dirige vers (1).

En continuant, nous analiserons la situation quand le tirage de toutes les n boules, est fait successivement. Maintenant, nous constaterons que le type et également l'ordre, des éléments, doivent être considérés, cela, parce qu'aux tirages successifs des boules qui nous interessent, il n'est plus la même chause quand on prend *blanc, noire, blanc*, ou respectivement *blanc, blanc, noire, etc.*

Par la suite, le comptage sera fait, en utilisant les arrangements ! Donc, le nombre des cas possibles, aux tirages successifs de ces n boules, est A_{a+b}^{n}. Le nombre des cas favorables arrive à $n!\ C_{a}^{\alpha} C_{b}^{\beta}$, parce qu'un groupe de α boules blanches, sur a et de β boules noires, sur b, peut être choisi dans une seule manière, en $C_{a}^{\alpha} C_{b}^{\beta}$ modes, quand les boules sont simultanément tirées et en $n!$ modes, quand elles sont prises l'une après l'autre. Donc, pour la probabilité cherchée, nous avons:

$$P = \frac{n! C_{a}^{\alpha} \cdot C_{b}^{\beta}}{A_{a+b}^{n}} = \frac{n! C_{a}^{\alpha} \cdot C_{b}^{\beta}}{n! C_{a+b}^{n}} = \frac{C_{a}^{\alpha} \cdot C_{b}^{\beta}}{C_{a+b}^{n}}$$

c'est à dire, la même avec celle trouvée en (1).

Avant de finaliser cette note mathématique, nous donnerons la généralisation naturelle du schème hypergéométrique. Pour cela, nous considérons que dans l'urne U, initiale, en existent $a_1, a_2, \ldots, a_m$ boules, de m couleurs différentes. D'entre eux, on tire simultanément ou successivement, n boules.

Alors, la probabilité que d'entre ces n boules, α_i soient de couleur i, quand $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et quand $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n$, est donnée par la relation:

$$P = \frac{C_{a_1}^{\alpha_1} \cdot C_{a_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots\ldots \cdot C_{a_m}^{\alpha_m}}{C_{a_1+a_2+\ldots+a_m}^{n}} \tag{2}$$

Bibliographie

[1] Bărbosu D., Zelina I., *Calculul probabilităţilor*, Ed. Cub Press 22, Baia Mare, 1998

[2] Bădin V., Coroiu R., Săcuiu I., *Éléments de la Théorie des Probabilités et de la Statistique Mathématique (en roumain)*, Litografia, A.S.E., Bucureşti, 1981;

[3] Blaga, P., Rădulescu, M., *Calculul proobabilităţilor, vol.I*, litografiat Univ. Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1987

[4] Burlacu V. *La Théorie des Probabilités, dans Mathématiques pour les économistes (en roumain)*, coord. Cenuşă Gh., Editura Cison, Bucureşti, 2000;

[5] Iosifescu M., Mihoc Gh., Theodorescu R., *La Théorie des Probabilités et de la Statistique Mathématique (en roumain)*, Editura Tehnică, Bucureşti,1966;

[6] Oprişan Gh., Sebe I.G., *Compendium de la Théorie des Probabilités et de la Statistique Mathématique (en roumain)*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1999;

[7] Popescu O., Raischi C., *La Théorie des Probabilités dans Mathématiques appliquées en économie (en roumain)*, coord. Popescu O., Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993;

[8] Reischer C., Sâmboan A., *Recueil de problèmes de la Théorie des Probabilités e de la Statistique Mathématique, pour les lycées (en rour ...)*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti,1972.

ON A COMBINATORIAL QUESTION

Abstract. This paper was written for clarifying a counting problem used in the *hypergeometric probabilistic scheme*. Through a simple Combinatorics principle we shall explain some approaches which have appeared in many books.

MSC classification: 60A99

Received: 11.04.2002

Department of Mathematics,
Faculty of Computer Science,
Academy of Economic Studies,
Calea Dorobanților, nr. 15-17, Sector 1,
71131 Bucharest
E-mail: modanl@inforec.ase.ro
Laurent.Modan@ecp6.jussieu.fr