Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 11(2002), 107 - 112

# PROPRIETĂŢI ALE INTERSECŢIILOR CLASELOR DE TRAPEZE PARTICULARE

**Gabriel TAGA şi Loredana TAGA**

Am scris această lucrare pornind de la numeroasele probleme de geometria trapezului întâlnite în culegerile de probleme sau propuse la concursurile şcolare. Mai precis încercăm să dăm condiţii necesare şi suficiente ca un trapez să facă parte din două din clasele de trapeze particulare: trapez isoscel (sau inscriptibil), trapez dreptunghic, trapez ortodiagonal şi trapez circumscriptibil. Vom observa că în toate cazurile, înălţimea este o medie între baze.

## 1. Introducere

Reamintim următoarele proprietăţi:

**Proprietatea 1 (Teorema lui Pithot).** *Un patrulater este inscriptibil dacă şi numai dacă suma laturilor opuse este aceeaşi ($AB+CD=BC+AD$);*

**Proprietatea 2 (Teorema lui Ptolemeu).** *Un patrulater convex ABCD este inscriptibil dacă şi numai dacă $AB \cdot CD=AB \cdot CD+BC \cdot AD$;*

**Proprietatea 3.** Un patrulater convex ABCD este ortodiagonal dacă şi numai dacă $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$;

**Proprietatea 4.** Într-un trapez, paralela la baze, dusă prin intersecţia diagonalelor este egală cu media armonică a bazelor;

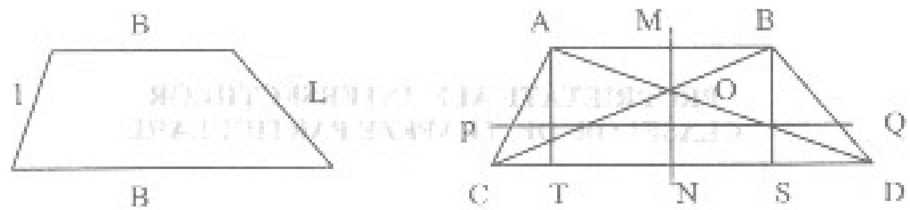
**Proprietatea 5.** Paralela la bazele unui trapez care-l împarte în două trapeze echivalente este media pătratică a bazelor.

**Proprietatea 6.** Paralela la bazele unui trapez, care-l împarte în două trapeze asemenea este media geometrică a bazelor.

**Proprietatea 7.** Linia mijlocie în trapez este paralelă cu bazele si este media aritmetică a lor.

## 2. Proprietăți ale unor trapeze particulare

Vom utiliza următoarele notații: "b, B, l, L"(B-b>0) - lungimea laturilor trapezului, astfel:




De asemenea notăm:

**T.D.:** Mulțimea trapezelor dreptunghice;
**T.I.:** Mulțimea trapezelor isoscele;
**T.C.:** Mulțimea trapezelor circumscriptibile;
**T.O.:** Mulțimea trapezelor ortodiagonale;
**T.A.:** Mulțimea trapezelor în care înalțimea e media aritmetică a bazelor;
**T.G.:** Mulțimea trapezelor în care înalțimea e media geometrică a bazelor;
**T.H.:** Mulțimea trapezelor în care înalțimea e media armonică a bazelor;

**Teorema 1.** *Dacă un trapez este isoscel și ortodiagonal, atunci înalțimea e media aritmetică a bazelor.*

**Demonstrație.** $OM=b/2$, $ON=B/2 \Rightarrow MN=(b+B)/2$;
**Consecința 1.** În **T.I.** și **T.O.**, linia mijlocie este egală cu înalțimea;
**Consecința 2.** În **T.I.** și **T.O.**, mijloacele laturilor formează un pătrat;

**Teorema 2** (Prima reciprocă a teoremei 1). *Dacă ABCD e **T.I.** și înalțimea e media aritmetică a bazelor, atunci ABCD este **T.O.***

**Demonstrația 1.** $MN=PQ$, MQNP paralelogram $\Rightarrow$ MQNP dreptunghi
$AC \| MQ$, $BD \| NQ \Rightarrow AC \perp BD$

**Demonstrație 2.** $\angle AOB$ ascuțit $\Rightarrow OM+ON>(b+B)/2$ (fals), și analog că nu este obtuz.

**Teorema 3** (A doua reciprocă a teoremei 1). *Daca ABCD e **T.O.** și înalțimea e media aritmetică a bazelor, atunci ABCD este **T.I.*** .

**Demonstrația 1.** Demonstrăm vectorial că: M, O, N-coliniare și $MN \perp DC$;

**Demonstrația 2.** $\left.\begin{array}{l} h \le MO+MN=(b+B)/2=h \Rightarrow MN \perp AB \\ M, O, N \text{ coliniare} \end{array}\right| \Rightarrow ABCD$ trapez isoscel

**Teorema 4.** *Dacă ABCD e **T.D.** si **T.O.**, atunci inalțimea este media geometrică a bazelor.*

**Demonstrație.** 1). $\Delta ABD \sim \Delta DAC \Rightarrow AB/AD=AD/DC \Rightarrow$ q.e.d.

2). $A_{ABCD}=h(b+B)/2=AC\cdot BD/2=\{[(h^2+B^2)(h^2+b^2)]^{1/2}\}/2$ $\Rightarrow (h^2-bB)^2=0$.

**Teorema 5** (Prima reciprocă a teoremei 4). *Dacă ABCD e **T.D.** și înălțimea este media geometrică a bazelor, atunci este **T.O.** .*

**Demonstrație.** $h/B=b/h \Rightarrow \Delta ADB \sim \Delta DCA \Rightarrow \angle AOB=\angle DCA \Rightarrow AC \perp BD$;

**Teorema 6** (A doua reciprocă teoremei 4). *Dacă ABCD e **T.O.** și înălțimea e media geometrică a bazelor, atunci ABCD este **T.D.** .*

**Demonstrație.** $ABCD \in$ **T.O.** $\Rightarrow b^2+B^2=l^2+L^2 \Rightarrow B^2+b^2=bB+a^2+bB+(B-b-a)^2 \Rightarrow a(a-B+b)=0 \Rightarrow a=0$ sau $a=B-b$, unde $a=DT$, deci trapezul aparține **T.D.**;

**Teorema 7.** *Dacă ABCD e **T.I.** si **T.C.**, atunci înălțimea este media geometrică a bazelor.*

**Demonstrația 1.** Se aplică teorema înălțimii în $\Delta AO'D$, unde O' este cercul centrului circumscris;

**Demonstrația 2.** Se aplică teorema lui Pitagora în $\Delta ADT$;

**Teorema 8.** *Dacă ABCD e **T.I.** și înălțimea este media geometrică a bazelor, atunci este **T.C.***

**Demonstrație.** Se aplică teorema lui Pitagora în $\Delta ADT$ și teorema lui Pithot;

**Teorema 9.** *Dacă ABCD e **T.C.** și înălțimea este media geometrică a bazelor, atunci este **T.I.***

**Demonstrație.** Notăm $AM=x$, $BD=y$; se aplică teorema înălțimii în $\Delta AO'D$ și în $\Delta BO'C$, iar din sistemul obținut: $Bb=4xy$, $bB=4(b-x)(B-y) \Rightarrow x=b/2$, $y=B/2$, deci trapezul este isoscel, unde O' este centrul cercului circumscris.

**Teorema 10.** *Dacă ABCD e **T.D.** și **T.C.**, atunci înalțimea este media armonică a bazelor.*

**Demonstrația 1.** Dacă $m(\angle A)=90^o$, $BC=B+b-h$ și $SC=B-b$ din teorema lui Pitagora în $\Delta BSC \Rightarrow h$ este media armonică a bazelor.

**Demonstrația 2.** Teorema înălțimii în $\Delta BO'C$, știind că $r=h/2$, $BR=b-h/2$, $CR=B-h/2$, unde O' este centrul cercului circumscris și $R=Pr_{BC}O'$.

**Consecința 1.** Dacă ABCD e **T.D.** și **T.C.**, atunci înălțimea este comgruentă cu paralela dusă la baze prin intersecția diagonalelor;

**Teorema 11.** *Dacă ABCD e **T.D.** și înălțimea este media armonică a bazelor, atunci este **T.C.***

**Demonstrație.** Se aplică teorema lui Pitagora în $\Delta BSC$ și teorema lui Pithot, unde $m(\angle A)=90^o$;

**Teorema 12.** *Dacă ABCD e **T.C.** și înalțimea este media armonică a bazelor, atunci este **T.D.***

**Demonstrație.** Notăm $AM=x$; se aplică teorema înălțimii în $\Delta AO'D$ și în $\Delta BO'C$, iar din sistemul obținut: $[Bb/(B+b)]^2=xy$, $[Bb/(B+b)]^2 = (b-x)(B-y) \Rightarrow$
$\Rightarrow x= Bb/(B+b)$ sau $x= b^2/(B+b)$ deci trapezul este dreptunghic, unde O' este centrul cercului circumscris.

Propunem următoarele probleme, care se rezolvă ușor folosind teoremele enunțate:

**Problema 1.** ABCD aparține **T.D.** int. **T.C.**, OF paralela cu DC, F aparține BC și aria AFD este 8, calculați AD.

**Indicație.** Conform T10, AD este media armonică a bazelor și folosim proprietatea 4 rezultă $AD=4$.

**Problema 2.** ABCD aparține **T.D.** int. **T.C.**, media geometrică a bazelor e 6, aflați aria lui ABCD.

**Indicație.** Folosiți T10.

**Problema 3.** ABCD trapez, $b=AB=3$, $CD=7$, $AD+BC=10$, $h=4,2$. Calculați măsura unghiului ADC.

**Indicație.** Folosiți T 12.

**Problema 4.** ABCD aparține **T.I.** intersectat cu **T.C.** și baza mare este diametrul cercului circumscris. Aflați raportul bazelor.

**Indicație.** Folosim T 7 și teorema lui Pitagora în triunghiului MQB, unde Q este centrul cercului circumscris.

**Problema 5.** ABCD trapez, $b=3$, $B=20$, $h=6$, $AD=10$, S este proiecția lui A pe DC. Arătați că AC și SB sunt perpendiculare.

**Indicație.** Observăm că AS e media geometrica a lui AB si SC și folosim T5;

**Teorema 13.** *Singurul patrulater ortodiagonal și circumscriptibil e patrulaterul zmeu.*

**Consecinţa 1.** Nu există trapeze ortodiagonale şi circumscriptibile.

**Consecinţa 2.** Singurul patrulater ortodiagonal circumscriptibil şi inscriptibil este paetrulaterul zmeu cu unghiurile congruente drepte (caz particular: patratul).

**Observaţia 1.** Nu există trapez dreptunghic şi inscriptibil (isoscel).

În concluzie:

$$\mathbf{TA \cap TC \subset TG}$$
$$\mathbf{TD \cap TC \subset TH}$$
$$\mathbf{TD \cap TO \subset TG}$$
$$\mathbf{TI \cap TO \subset TA}$$
$$\mathbf{TO \cap TC = \emptyset}$$
$$\mathbf{TD \cap TI = \emptyset}$$

În fapt, teoremele enunţate pot constitui probleme pentru clasele VII-X, ca aplicaţii la diferite capitole ale curriculum-ului: medii calcul algebric, operaţii cu radicali, relaţii metrice, arii sau vectori, produs scalar, patrulatere inscriptibile şi circumscriptibile.

Am prezentat în fiecare din cele 4 cazuri în câteva exemple de probleme dificile, ce se rezolvă folosind teoremele enunţate. Menţionăm, ca un exemplu în sprijinul rerzultatelor teoretice prezentate, că problema următoare de la faza naţională 2001 clasa a 7-a are o soluţie relativ simplă dacă se caută obţinerea unui trapez din intersecţia a două clase de trapeze:

**Problema ON 2001:** ABCD trapez dreptunghic, AB baza mare, $m(\angle A)=90^0$, AD>CD.AC şi CD se intersectează în O. Paralela prin O la AB intersectează AD în E şi BE intersectează CD în F. Demonstraţi că $CE \perp AF$ dacă şi numai dacă $AB \cdot CD = AD^2 - CD^2$ (a se vedea G.M.5-6/2001 pentru altă soluţie).

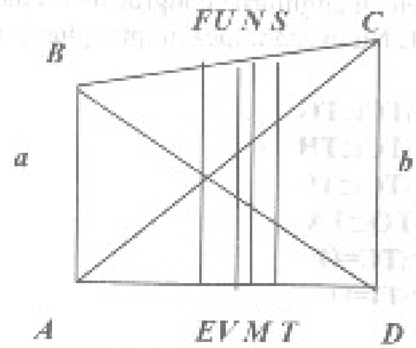
**Inegalitatea mediilor.** În final iată o demonstraţie interesantă a inegalităţii mediilor pentru 2 numere pozitive a>0, b>0:

min(a,b) < media armonică < media geometrică < media aritmetică < media patratică < < max(a,b)

Se alege trapezul dreptunghic ABCD cu $m(\angle A)=m(\angle D)=90^0$, M mijlocul lui AD, AB=a,CD=b (a<b), $AC \perp BD$. Avem inegalităţile evidente:

$$AB=a<EF=2OF<2OM=AD=UV<MN<ST<CD=b$$

unde EF (paralelă la AB, prin O) este media armonică a bazelor a, b; AD este media geometrică a bazelor (conform cu Proprietatea 4); linia mijlocie MN este media aritmetică a bazelor; UV este paralela la baze care împarte trapezul în două trapeze asemenea; MN este paralela la baze care împarte trapezul în două figuri echivalente.




## Bibliografie

1. *Matematică, manual pentru clasa a IX-a de liceu şi anul I licee de specialitate, partea a II-a Geometrie*, EDP, Bucureşti, 1969
2. Augustin Coţa, M. Rădoi, M. Răduţiu, Fl. Vornicescu, *Matematică. Geometrie şi Trigonometrie, Manual pentru clasa a IX-a*, EDP Bucureşti, 1981.

## ON SOME PROPERTIES OF SPECIAL TRAPEZOIDS

**Abstract.** In this note we study interesting properties in special trapezoids. Then we present some applications.

Primit la redacţie: 12.09.2002

2400 Ploieşti
ROMANIA