Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.11(2002), 125 - 134

OPERATORI DE EVOLUȚIE ȘI OPERATORI DE FUNCȚIONARE

PETRU-AVRAM PETRIȘOR

1. INTRODUCERE. Știința sistemelor a apărut în deceniul al cincilea al secolului trecut prin lucrările lui Bertalanffy și a devenit cunoscută prin [10]. Termenul de sistem provine din biologie, dar astăzi acest termen este utilizat și în alte domenii cum sunt sistemele de puncte materiale ale dinamicii lui Newton, circuite electrice, câmpuri electromagnetice, sisteme de telecomunicații, sistemele automate, economia etc.

Prin sistem se înțelege o colecție de obiecte caracterizate prin anumite forme de interacțiune și ansamblul lor reprezintă structura sistemelui.

Dacă S(t) este starea sistemului la momentul t, atunci familia $\{S(t) | t \in T\}$, unde T este o mulțime de momente ordonate crescător, definește evoluția sistemului. Parametrii care definesc în mod unic starea sistemului la un moment t dat și care au proprietatea că trecerea la starea ulterioară este posibilă se numesc mărimi (parametri) de stare. Starea finală a unei evoluții a unui sistem este determinată de starea inițială a acestuia și de anumite mărimi având variații independente și care acționează pe timpul evoluției sistemului, numite mărimi de intrare.

Acțiunea exercitată de finalul unei evoluții este caracterizată de anumite mărimi care se numesc mărimi de ieșire.

Mărimile de intrare și mărimile de ieșire definesc interacțiunea sistemului cu mediul exterior sistemului. Dacă aceste interacțiuni depind de timp, atunci ele se numesc variabile de interacțiune și mărimile de intrare respectiv de ieșire se vor numi variabile de intrare respectiv variabile de ieșire.

Studiul variabilelor de intrare și ieșire își are originea în filozofia lui Aristotel: "Întregul premerge partea" și noțiunea de întreg (variabile de ieșire) este caracteristică conștiinței teoretice a lui Goethe, dar ea nu are un caracter teleologic, nici în ce privește natura ca întreg, nici în ce privește părțile ei în contradicție cu I. Kant. În acest sens teoria sistemelor pune față în față știința și filozofia deoarece filozofia trebuie să împiedice experiențele fără ieșire și știința să împiedice dogmatismul gândirii filozofice, cu alte cuvinte rămâne deschisă problema găsirii izvorului apariției întregurilor, lucru menționat și de un vers din Georgicele lui Virgiliu: "Felix qui potuit rerum cognoscere causas" (Fericit a fost acela care a putut pătrunde cauzele secrete ale lucrurilor).

Descompunerea întregului în elemente componente a fost ridicată la rang de metodă de către Descartes. Astfel a apărut crezul că dacă se cunosc elementele componente, dacă se stabilesc analogii, dacă se pune în evidență succesiunea lucrurilor și se realizează un model al fenomenului, atunci se obțin informații importante despre esența lucrurilor. În modul acesta a acționat și Bacon ajungând la pierderea inteligibilității și transformându-se într-un contemplator al unor succesiuni, căci obținerea unei exprimări analitice nu ne duce la cunoașterea esenței ci dimpotrivă se poate obține o falsificare. De exemplu așa numită lege a lui Fechner ([6]) care afirmă că senzația variază în raport cu logaritmul excitației, între anumite limite. Excitația se poate măsura, dar cum se pot măsura senzațiile care nu sunt cantitate, ci calitate ?

Un sistem este descris prin anumite variabile numite variabile terminale între care există relații de forma:

$$R_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad i = \overline{1, m}$$

Dacă x este vectorul n-dimensional $(x_1, x_2, ..., x_n)$, atunci relațiile precedente pot fi scrise sub forma: $R_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, m}$

Observăm că în unele relații nu se pot evidenția mărimi de intrare și mărimi de ieșire, de exemplu legea lui Fechner, dar dacă pentru un sistem se pot pune în evidență anumite mărimi de intrare x_j și anumite mărimi de ieșire y_k, atunci sistemul este caracterizat de relațiile:

$$R_i(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = 0, \quad i = \overline{1, m}$$

Introducând vectorii $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$, $R = (R_1, R_2, ..., R_m)$ vom obține:

$$R(x, y) = 0, \quad x \in X, \; y \in Y$$

unde X se numește spațiul abstract al mărimilor de intrare și Y se numește spațiul abstract al mărimilor de ieșire. Mărimile de intrare și ieșire variază în timp și deci un sistem este definit de o relație de tipul:

$$R(x[t_0, t_1](t), y[t_0, t_1](t)) = 0, t_0, t_1 \in T$$

unde T este o mulțime timp și $x[t_0,t_1](t)$ reprezintă mărimile de intrare la momentul $t\in[t_0,t_1]$ și $y[t_0,t_1](t)$ reprezintă mărimile de ieșire pentru momentul $t\in[t_0,t_1]$. Prin urmare un sistem este definit de mulțimea ordonată ([7]):

$$\{(x[t_0,t_1](t), y[t_0,t_1](t)) | t\in[t_1,t_2], t_1,t_2\in T, R(x,y)=0\}$$

2. SISTEME DINAMICE. Un sistem se numește dinamic (statistic) dacă mărimile sale de stare și de intrare sunt accesibile determinării experimentale cu o precizie nelimitată. Evoluția unui sistem este complet determinată de starea lui inițială și de variația în timp a intrărilor lui în intervalul cuprins între două momente t_0, t_1, unde t_0 este momentul inițial (principiul cauzalității). Prin urmare fiecărui sistem i se poate atașa un operator de evoluție E care asociază ansamblului format de starea într-un moment inițial și mulțimea de funcții de timp care definesc începând cu acel moment intrările câte o singură stare a sistemului în fiecare moment care urmează momentului inițial.

De asemenea unui sistem i se poate atașa un operator de funcționare F (operator de răspuns) care asociază ansamblului format de starea într-un moment inițial și de mulțimea de funcții de timp care definesc începând din acel moment intrările câte o mulțime unică de funcții de timp care definesc ieșirile lui în fiecare moment ulterior celui inițial.

Dacă sistemul dinamic are un număr finit de intrări și de variabile de stare, atunci sistemul se numește sistem cu parametrii concentrați. Dacă sistemul are o infinitate de intrări și de variabile de stare, atunci sistemul se numește sistem cu parametrii repartizați.

3. EXEMPLE ([1], [9])

a) Sistemele dinamice de puncte materiale reprezintă sisteme cu parametrii concentrați;

b) Circuitele electrice sunt sisteme dinamice cu parametrii concentrați;

c) Câmpurile electromagnetice de deformații reprezintă sisteme dinamice cu parametrii repartizați;

d) Economia este un sistem dinamic;

e) Circuitul electric a cărui intrare este un semnal de tensiune și a cărui ieșire constă în citirea unui curent;

f) O rețea de elemente de comutație a cărei intrare este deschiderea (închiderea) unui număr de contacte (de intrare) și a cărei ieșire este aprinderea (stingerea) unor becuri luminoase;

g) Sistemul de transmisiuni a informației, format dintr-un generator de semnale (sistemul conducător), receptorul de semnale (sistemul condus) și canalul direct și invers prin care se transmite semnalul de la generator la receptor și invers este un sistem dinamic;

h) Sistemele de prelucrarea optică a informației reprezintă sisteme dinamice;

i) Sisteme numerice de transmitere a informației;

j) Sisteme socio-economice;

k) Sisteme bio-ecologice;

l) Sisteme de conducere pe baza prelucrării automate a datelor.

4. OBSERVAȚII. Un sistem dinamic este definit de elementele:

D1) O mulțime de timp T;

D2) O mulțime de stare S;

D3) O mulțime a valorilor de intrare U;

D4) O mulțime de funcții $I = \{f : T \to U\}$ numită mulțimea funcțiilor de intrare;

D5) O mulțime Z numită mulțimea valorilor de ieșire;

D6) O mulțime de funcții $E = \{h : T \to Y\}$ numită mulțimea funcțiilor de ieșire.

5. DEFINIȚII ȘI NOTAȚII.

5.1. DEFINIȚIE. Se numește sistem dinamic mulțimea:

$$\Omega = \{T, S, U, I, Y, E\}$$

încât următoarele proprietăți sunt verificate:

a) Mulțimea $T \subseteq R$ este o mulțime ordonată în mod natural;

b) Mulțimea Ω nu este vidă;

c) Pentru orice segment de intrare $x(t_1, t_2]$ există $h \in I$ astfel încât:

$$h\big|_{(t_1, t_2] \cdot T} = x(t_1, t_2], t_1, t_2 \in T$$

d) $(\forall) f, g \in I$ și $(\forall) t_1, t_2, t_3 \in T, t_1 < t_2 < t_3$ $(\exists) h \in I \Rightarrow$

$$\Rightarrow h(t_1, t_2] = f(t_1, t_2] \text{ și } h(t_2, t_3] = g(t_2, t_3]$$

e) Există funcția $H : TxTxSxI \to S$ numită funcția de tranziție a stărilor definită astfel: $H(t, t_0, s, f)$ este starea s(t) obținută la momentul $t \in T$ din starea inițială $s_0 = s(t_0) \in S$ și timpul inițial t_0 sub acțiunea intrării $f \in I$;

f) $D_{def}^{H} = [t_0, \infty)$, unde D_{def}^{H} este domeniul de definiție al funcției de tranziție a stărilor H;

g) $H(t, t, s, f) = s \quad (\forall)(t \in T, s \in S, f \in I)$;

h) Dacă $t_1, t_2, t_3 \in T, t_1 < t_2 < t_3$ sunt elemente arbitrare, atunci:

$$H(t_3, t_1, s, f) = H(t_3, t_2, H(t_2, t_1, s, f), f)$$
$$(\forall) s \in S \text{ și } (\forall) f \in I$$

i) Dacă $f, g \in I$ și $f(t_0, t) = g(t_0, t)$, atunci

$$H(t, t_0, s, f) = H(t, t_0, s, g)$$

j) Există o funcție de ieșire $K : TxS \to Y$ care determină mărimea de ieșire $y(t) = K(t, s(t))$. Tranziția $u : (t_0, t] \to Y$ dată prin:

$$\sigma \mapsto K(\sigma, H(\sigma, t, s, f)), \quad \sigma \in (t_0, t]$$

este un segment de ieșire și avem:

$$(\exists) e \in E \Rightarrow e\big|_{(t_0, t]} = e(t_0, t]$$

5.2. DEFINIȚIE. Sistemul dinamic Ω se numește sistem neted dacă și numai dacă sunt îndeplinite condițiile:

a) Mulțimea T coincide cu mulțimea numerelor reale R înzestrată cu topologia uzuală;

b) Mulțimile S și I sunt organizate ca spații topologice;

c) $H \in C(TxSxI,\ C_S^1(T))$, unde $C(TxSxI,\ C_S^1(T))$ este spațiul liniar al aplicațiilor continue definite pe TxSxI cu valori în spațiul liniar al funcțiilor continue definite pe T cu valori în S având derivată de ordinul întâi continuă.

5.3. TEOREMĂ ([12]) *Fie Ω un sistem dinamic neted astfel încât:*

a) S și U sunt spații vectoriale normate;

b) I este un spațiu normat în raport cu norma:

$$\|f\| = \sup\{f(t) | t \in T\}$$

c) $H \in C_S^1(T)$ în raport cu prima variabilă;

d) Aplicația:

$$(t_0, s, u(\xi)) \to \frac{d}{dt} H(t, t_0, s, u(\xi))$$

este continuă în raport cu t față de topologia produs.

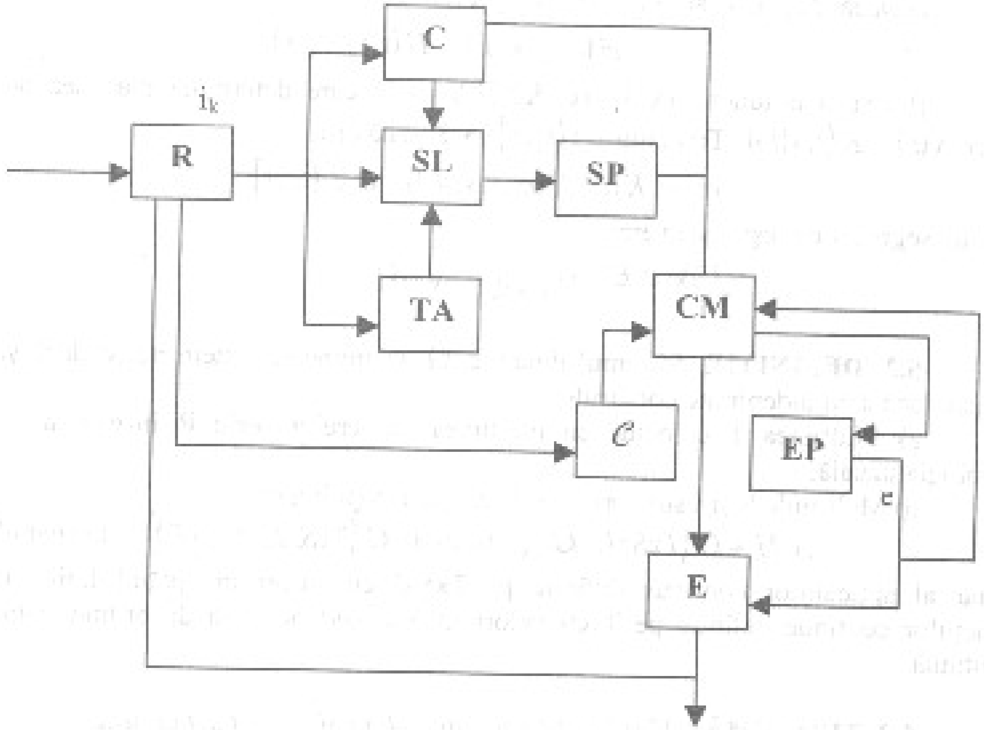
Fie aplicația:

$$\Pi_t : I \to U,\ \Pi_t(f) = f(t)\ (\forall) t \in T$$

Atunci există o funcție h astfel încât să avem:

$$\frac{dH}{dt} = h(t, H, \Pi_t)$$

5.4. OBSERVAȚIE. Vorbirea poate fi considerată ca un sistem dinamic format dintr-un generator de semnale, un receptor de semnale și un canal direct și invers prin care se transmit semnale. Observăm că un astfel de sistem poate fi considerat ca un sistem cibernetic și un model al lui are forma ([1]):



unde $i_k\left(k=\overline{1,n}\right)$ reprezintă intrări, R este sistemul de recunoaştere a semnalelor de intrare, SP este un sistem de programare, SL este selectorul logic, TA reprezintă tonalizatorul afectiv, CM este contextul motor, EP este sistemul extrapiramidal, C este cerebelul şi $\mathcal{C}$ este blocul gândirii. În acest model CM, P, EP reprezintă dispozitivul de comandă şi E este ieşirea propriu-zisă.

Inferenţa gramaticală este caracterizată, prin elementele: spaţiul ipotezelor, spaţiul observaţiilor, relaţia de numire şi metoda de identificare. Metoda de identificare este procedura prin care, plecând de la informaţiile din spaţiul de observaţii, găsim un nume pentru un obiect studiat din spaţiul de ipoteze ([2]).

Fie $\{\Omega, K, P\}$ un câmp borelian de probabilitate, X şi Y două mulţimi de indici cel mult numărabile şi $(x_n)_{n\in N},(y_n)_{n\in N}$, $x_n:\Omega\to X, y_n:\Omega\to Y$ două şiruri de variabile aleatoare. Fie A o mulţime numită mulţime de utilităţi care efectuează o activitate asupra unui mediu B prin intermediul modelului M(A,B) definit astfel:

$$M(A,B)=\{X,Y,P^0,Q,R,u,\beta\}$$

unde X se interpretează ca mulţimea stărilor mediului B, observabile, Y este mulţimea acţiunilor lui A asupra lui B. Mulţimea

$$P^0=\{P(x_0(\varpi)=i|i\in X\}$$

se numeşte repartiţia iniţială şi mulţimea:

$$Q = \{P(y_{n+1}(\varpi) = j | x_n(\varpi) = i), i \in X, j \in Y, n \in N^*, P(x_n(\varpi) = i) \neq 0\}$$

se numește strategie, iar mulțimea:

$$R = \{P(x_{n+1}(\varpi) = k | y_{n-1}(\varpi) = j, x_n(\varpi) = i),$$
$$i, k \in X, j \in Y, P(y_{n+1}(\varpi) = j, x_n(\varpi) = i) \neq 0\}$$

unde $\varpi \in \Omega$, se numește previziunea acțiunii. Prin Q înțelegem mulțimea strategiilor admisibile. Elementele mulțimii P^0 le notăm cu p_i^0, elementele mulțimii Q vor fi notate cu q_{ij} și ale mulțimii R cu r_{ijk}.

Observăm că q_{ij} este probabilitatea ca după sesizarea stării i a lui B să se efectueze acțiunea j, iar r_{ijk} este probabilitatea ca după efectuarea acțiunii j ca răspuns la starea i, B să ajungă în starea k.

Identificând Ω cu mulțimile cilindrice:

$$(x_0, y_1, x_1, y_2, ...)$$

se constată cu ușurință că $\mathrm{M}(A, B) \neq \Phi$ și pentru o strategie $[Q] \in Q$ dată succesiunea stărilor lui B formează un lanț Markov ([11]).

În mulțimea $\mathrm{M}(A, B)$, $u : X \to R$ este funcția de utilitate reală de tip Neumann-Morgenstern ([4]) și $\beta \in [0,1]$ este un factor de actualizare ([11]).

Noțiunea de utilitate a informației este strâns legată de modul de măsurare a cantității de informație și ea a fost studiată pentru prima dată în lucrările lui G. Cramer (1704 – 1752). Această noțiune o găsim și în lucrările lui D. Bernoulli (1700 – 1782) când teoria probabilităților a fost consolidată, dar studiul utilității informației din punct de vedere matematic a fost făcut de J. Neumann (1908 – 1957) și O. Morgenstern (1902 – 1957).

Numim propoziție o implicație de forma:

$$C_i \to C_k, C_i, C_k \in k$$

definită pe succesiuni de stări și acțiuni de forma $(i_0, j_1, i_1, j_2, ...)$ și probabilitatea unei propoziții se definește astfel:

$$P(C_i \to C_k) = \frac{P(C_i \cap C_k)}{P(C_i)} \to P(C_i) \neq 0$$

Vom aplica considerentele de mai sus într-un caz particular.

Fie P o mulțime de propoziții având caracteristicile:

C1. Propoziția are subiect;

C2. Propoziția are predicat exprimat printr-un verb;

C3. Propoziția are predicat exprimat printr-un verb la prima sau a doua persoană;

C4. Propoziția are predicat exprimat printr-un verb la timpul trecut, persoana a treia, plural.

În raport cu aceste caracteristici se pot construi următoarele tipuri de propoziții:

A. Propoziția are subiect și predicatul este exprimat printr-un verb;
B. Propoziția are subiect și predicatul este exprimat printr-un verb care nu este la timpul viitor;
C. Propoziția nu are subiect specificat și predicatul este exprimat printr-un verb la prima sau a doua persoană;
D. Propoziția nu are subiect și predicatul este exprimat printr-un verb la timpul trecut, persoana a treia plural;
E. Propoziția nu are subiect specificat și predicatul este exprimat printr-un verb la orice persoană sau la timpul trecut prima sau a doua persoană.

Dacă introducem notațiile:

$$P_{AB} = A \vee B, P_{CDE} = C \vee D \vee E, P_{DE} = D \vee E$$

constatăm că dacă $P \in \mathrm{P}$ este un element arbitrar, atunci:

$$P = P_{AB} \vee P_{CDE} \vee P_{DE}$$

Din aceste considerente constatăm că are sens problema: fiind dată propoziția $Q \in \mathrm{P}$, să se determine dacă ea este de tipul A, B, C, D sau E.

Probabilitatea de apariție a caracteristicii $c_i\left(i = 1,4\right)$ se determină printr-o anumită statistică a limbii, adică, se ia un număr mare de propoziții și se determină frecvența caracteristicii $c_i\left(i = \overline{1,4}\right)$. Vom defini energia informațională a caracteristicii c_i prin egalitatea:

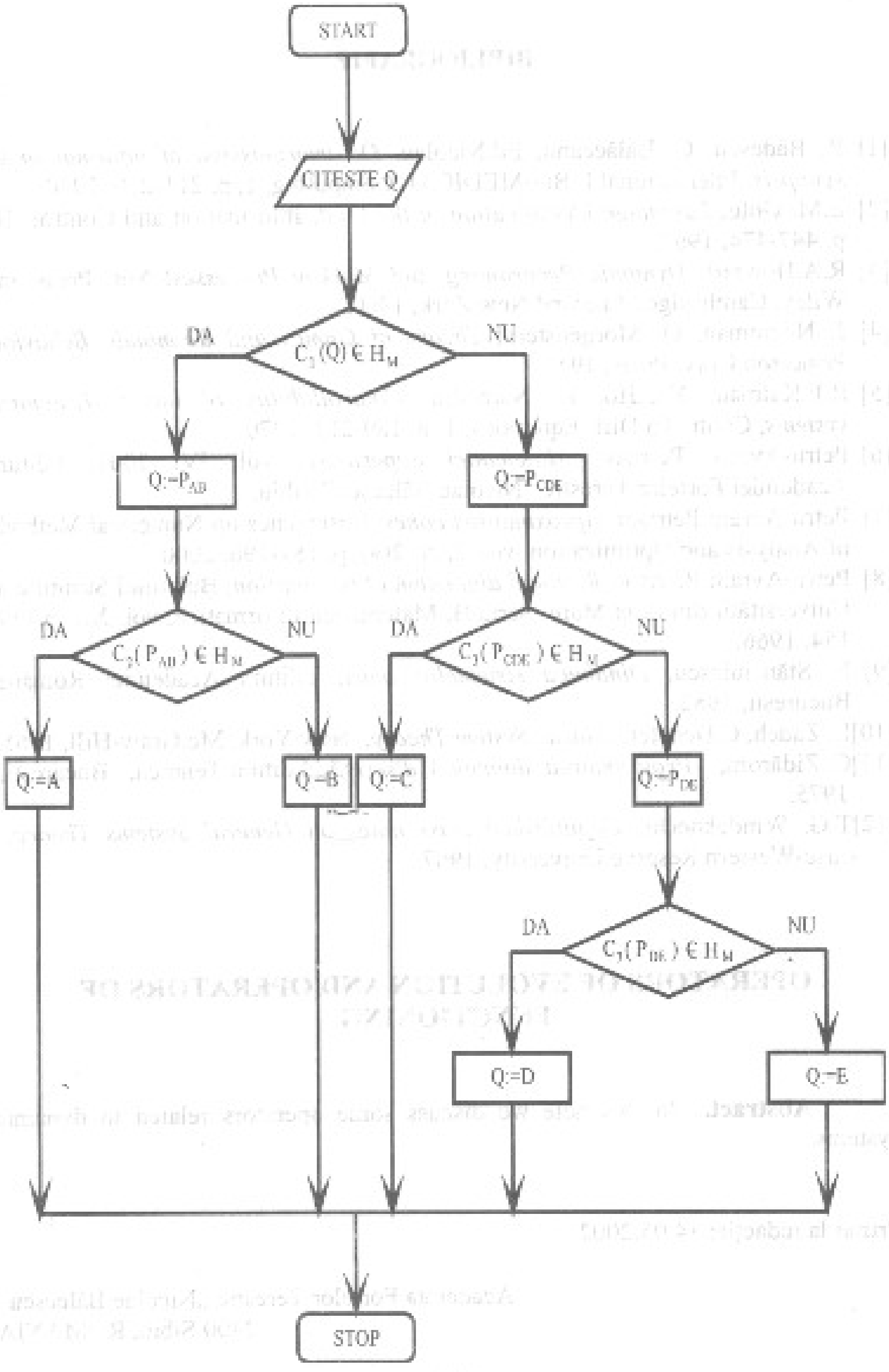
$$H(c_i) = -p(c_i)\log_2 p(c_i) - p\left(\overline{c_i}\right)\log_2 p\left(\overline{c_i}\right)$$

unde $\overline{c_i} = non\, c_i$ și vom nota cu simbolul $C_i(Q) \in H_M$ faptul că dintre toate caracteristicile propoziției Q caracteristica c_i are cea mai mare energie informațională ([1]).

Pentru a stabili dacă propoziția $Q \in \mathrm{P}$ este de tipul A, B, C, D sau E folosim schema de mai jos, unde $C_i(Q) \in H_M$ reprezintă faptul că dacă Q depinde de caracteristicile C_i, C_j, C_k, C_p, atunci avem:

$$H(C_i) > H(C_j), H(C_i) > H(C_k), H(C_i) > H(C_p)$$

și în acest caz neglijând caracteristica C_i din Q obținem o nouă propoziție care nu conține caracteristica C_i și acestei propoziții i se aplică procedeul precedent.


START
CITESTE Q
DA
$C_1(Q) \in H_M$
NU
$Q:=P_{AB}$
$Q:=P_{CDE}$
DA
$C_2(P_{AB}) \in H_M$
NU
DA
$C_3(P_{CDE}) \in H_M$
NU
Q:=A
Q:=B
Q:=C
$Q:=P_{DE}$
DA
NU
Q:=D
Q:=E
STOP

BIBLIOGRAFIE

[1] R. Bădescu, C. Bălăceanu, Ed.Nicolau, *On transmission of information by synapsis*, International I. Bio-MEDICAL Computing, 1, p. 211-220, 1970.

[2] E.M. Gold, *Language identification in the limit*, Information and Control, 10, p. 447-474, 1967.

[3] R.A.Howard, *Dynamic Programing and Markov Processes*, Mit. Press and Wiley, Cambridge Mass and New Zork, 1960.

[4] J. Neumman, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton Univ. Press, 1944.

[5] R.F.Kalman, Y.C.Ho, K. Narendra, *Controllability of linear dynamical systems*, Contr. To Diff. Equqtions, 1, p. 189-213, 1970.

[6] Petru-Avram Petrişor, *Matematici Superioare*, vol. IV, 2001, Editura Academiei Forţelor Terestre "Nicolae Bălcescu" Sibiu.

[7] Petru-Avram Petrişor, *Aproximation cones*, Researches on Numerical Methods of Analysis and Optimization, vol. 2, nr. 2(4), p. 187-196, 2000.

[8] Petru-Avram Petrişor, *Rational algorithm of recognition*, Buletinul Ştiinţific al Universităţii din Baia Mare, Seria B, Matematică-Informatică, vol. XII, p.139-154, 1966.

[9] F. Stănciulescu, *Dinamica sistemelor mari*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1982.

[10]L. Zadeh, C.Desofer, *Linear System Theory*, New York, Mc.Graw-Hill, 1965.

[11]C. Zidăroiu, *Programarea dinamică discretă*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1975.

[12]T.G. Windeknecht, *Unpublished class notes on General Systems Theory*, Case-Western Reserve University, 1967.

OPERATORS OF EVOLUTION AND OPERATORS OF FUNCTIONING

Abstract. In this note we discuss some operators related to dynamic systems.

Primit la redacţie: 14.05.2002

Academia Forţelor Terestre „Nicolae Bălcescu"
2400 Sibiu, ROMÂNIA